$3^{-1}=\frac{1}{3}$，故答案为$\frac{1}{3}$.

关键点拨

绝对值的非负性

$$|a|=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0).\end{cases}$$

7. $-\frac{5}{3}$ 【解析】因为$(-x,4)$是"共生数对"，所以$-x+4=-4x-1$，解得$x=-\frac{5}{3}$.

8. -3 【解析】$\because x_1,x_2$是方程$x^2-(3-2m)x+m^2=0$的两个根，$\therefore x_1+x_2=3-2m,x_1x_2=m^2$. $\because x_1+x_2-x_1x_2=0$，$\therefore 3-2m-m^2=0$，解得$m_1=1,m_2=-3$. 当$m=1$时，原方程为$x^2-x+1=0$，此时原方程无解；当$m=-3$时，原方程为$x^2-9x+9=0$，此时原方程有解，$\therefore m$的值为$-3$. 故答案为$-3$.

9. 5 【解析】原分式方程去分母得$2+3x=k$. $\because$分式方程有增根，$\therefore x-1=0$，即$x=1$. 把$x=1$代入$2+3x=k$得$k=5$，故答案为5.

10. 【解】(1)$\begin{cases}3x-y=2,①\\x+y=-4,②\end{cases}$ ①+②，得$4x=-2$，解得$x=-\frac{1}{2}$.

把$x=-\frac{1}{2}$代入②，得$-\frac{1}{2}+y=-4$，解得$y=-\frac{7}{2}$，

$\therefore$原方程组的解为$\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=-\frac{7}{2}.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}3(x+1)>x-1,①\\\frac{x-9}{2}<2x,②\end{cases}$ 解不等式①，得$x>-2$；

解不等式②，得$x>-3$，$\therefore$原不等式组的解集为$x>-2$.

11. 【解】(1)设书架上有数学书x本，则有语文书$(90-x)$本.

根据题意得，$0.8x+1.2(90-x)=84$，

解得$x=60$，

所以$90-x=30$.

答：书架上有数学书60本，语文书30本.

(2)设数学书还可以摆m本，则$10\times1.2+0.8m\leqslant84$，

解得$m\leqslant90$.

答：数学书最多还可以摆90本.

12. 【解】(1)设第一批购进A款头盔x个，则购进B款头盔$(500-x)$个. 根据题意，得$10x+16(500-x)\leqslant6\ 320$，整理，得$6x\geqslant1\ 680$，解得$x\geqslant280$.

答：A款头盔至少购进280个.

(2)根据题意，可得$(280+8m)(20+2m-10)+[300\times(1-5\%)\times20-300\times16]=5\ 044$，整理得$m^2+40m-84=0$，解得$m=2$或$m=-42$(不符合题意，舍去)，所以$m$的值为2.

第三章 函数

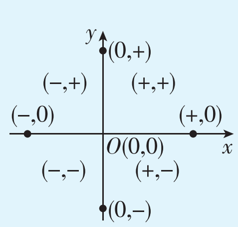
A 2025真题诊断练

刷诊断

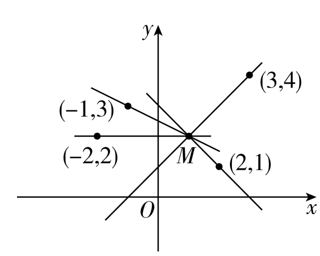
1. B 【解析】$\because -2<0,a^2+1>0$，$\therefore$点P所在的象限是第二象限. 故选B.

刷有所得

平面直角坐标系中各象限内及坐标轴上点的坐标特征



2. D 【解析】如图. 若过$M(1,2)$的直线经过点$(-2,2)$，则该直线与x轴平行，不符合题意；若过$M(1,2)$的直线经过点$(2,1)$，则y随着x的增大而减小，不符合题意；若过$M(1,2)$的直线经过点$(-1,3)$，则y随着x的增大而减小，不符合题意；若过$M(1,2)$的直线经过点$(3,4)$，则y随着x的增大而增大，符合题意. 故选D.



3. B 【解析】$\because y=\frac{4}{x}$，$k=4>0$，$\therefore$在每一个象限内y随x的增大而减小，当$y=2$时，$x=\frac{4}{2}=2$；当$y=4$时，$x=\frac{4}{4}=1$，$\therefore$当$2<y<4$时，$1<x<2$，故选B.

4. C 【解析】

选项	分析	判断
A	由题图知$v=0$ km/h时，$\mu=0.9$，$\therefore$该选项说法正确	不符合题意

续表

选项	分析	判断
B	由题图知 $0\leqslant v\leqslant 60$ 时，这款轮胎的摩擦系数 μ 随车速的增大而减小，∴ 该选项说法正确	不符合题意
C	由题图知，$\mu\geqslant 0.71$ 时，$v\leqslant 60$ km/h，∴ 该选项说法错误	符合题意
D	由题图知 $v=25$ km/h 时，$\mu=0.75$；$v=60$ km/h 时，$\mu=0.71$. $0.75-0.71=0.04$，∴ 该选项说法正确	不符合题意

关键点拨

根据表示摩擦系数 μ 与车速 v(km/h)之间函数关系的图象分析是关键.

5. D 【解析】由抛物线开口向下，得 $a<0$. ∵ 顶点 P 的横坐标为 1，∴ $-\frac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a$，∴ $b>0$. ∵ 抛物线交 y 轴于正半轴，∴ $c>0$，∴ $abc<0$，故①正确. ∵ 当 $x=1$ 时，y 有最大值，∴ 把 $x=1$ 和 $x=m$ 代入 $y=ax^2+bx+c$，得 $a+b+c\geqslant am^2+bm+c$，∴ $am^2+bm-a-b\leqslant 0$，故②不正确. ∵ 抛物线与 x 轴的交点 A 位于$(-2,0)$和$(-1,0)$之间，∴ $a-b+c>0$，∴ $-\frac{1}{2}b-b+c>0$，整理后得 $3b<2c$，故③正确. ∵ 顶点为 $P(1,n)$，∴ $y=a(x-1)^2+n$. ∵ $\triangle PAB$ 为等边三角形，∴ 易得 B 点的坐标为 $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}n,0\right)$，代入 $y=a(x-1)^2+n$，得 $0=a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}n-1\right)^2+n$，∴ $n=-\frac{3}{a}$，故④正确. 故选 D.

6. $y=-x^2+x+2$（答案不唯一） 【解析】∵ 二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象经过点$(c,0)$，∴ $0=-c^2+bc+c$. ∵ 二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象不经过原点，∴ $c\neq 0$，∴ $c-b=1$. 若 $b=1$，则 $c=2$，∴ 该二次函数的解析式可以是 $y=-x^2+x+2$，故答案为 $y=-x^2+x+2$（答案不唯一）.

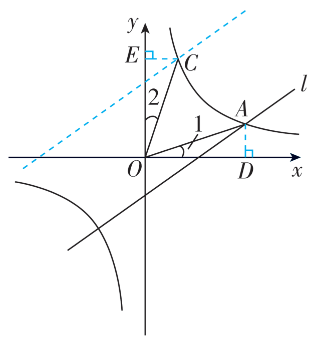
7. 16 000 【解析】设 p 与 V 之间的函数关系式为 $p=\frac{k}{V}$（k 为常数，且 $k\neq 0$）. 将 $V=1.2$，$p=20\ 000$ 代入 $p=\frac{k}{V}$，得 $20\ 000=\frac{k}{1.2}$，解得 $k=24\ 000$，∴ p 与 V 之间的函数关系式为 $p=\frac{24\ 000}{V}$. 当 $V=1.5$ 时，$p=\frac{24\ 000}{1.5}=16\ 000$，∴ 当 $V=1.5$ m^3 时，$p=16\ 000$ Pa. 故答案为 16 000.

8. 0.8 【解析】质量为 0.5 千克的物体的重力为 $0.5g$，当 $F=0.5g$ 时，$x=6.5-6=0.5$，代入 $F=kx$，得 $0.5g=k\cdot 0.5$，∴ $k=g$，∴ $F=gx$. 当 $x=6.8-6=0.8$ 时，$F=g\cdot 0.8=0.8g$，∴ $mg=0.8g$，∴ $m=0.8$，∴ 所挂物体的质量为 0.8 千克. 故答案为 0.8.

9. $(1,-1)$ 【解析】∵ $A_1(1,-1)$，∴ 点 A_2 的横坐标为 1. 将 $x=1$ 代入 $y=\frac{1}{x}$ 可得，$y=1$，∴ $A_2(1,1)$，∴ 点 A_3 的纵坐标为 1. 将 $y=1$ 代入 $y=-x$ 可得，$x=-1$，∴ $A_3(-1,1)$，∴ 点 A_4 的横坐标为 -1. 将 $x=-1$ 代入 $y=\frac{1}{x}$ 可得，$y=-1$，∴ $A_4(-1,-1)$，∴ 点 A_5 的纵坐标为 -1. 将 $y=-1$ 代入 $y=-x$ 可得，$x=1$，∴ $A_5(1,-1)$，…，∴ 每 4 次操作为一个循环. ∵ $2\ 025\div 4=506\cdots\cdots 1$，∴ 点 $A_{2\ 025}$ 的坐标为$(1,-1)$. 故答案为$(1,-1)$.

10.【解】(1) ∵ 直线 l：$y=\frac{2}{3}x+m$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象交于点 $A(6,2)$，∴ $\frac{2}{3}\times 6+m=2$，$\frac{k}{6}=2$，∴ $m=-2$，$k=12$，∴ 一次函数和反比例函数解析式分别为 $y=\frac{2}{3}x-2$，$y=\frac{12}{x}$.

(2) 如图，作 $AD\perp x$ 轴于点 D，$CE\perp y$ 轴于点 E，



∴ $\angle ADO=\angle CEO=90°$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\triangle AOD\backsim\triangle COE$，∴ $\frac{AD}{CE}=\frac{OD}{OE}$.

∵ $A(6,2)$，∴ $AD=2$，$OD=6$，∴ $\frac{2}{CE}=\frac{6}{OE}$，∴ $OE=3CE$.

设 $CE=a$，则 $OE=3a$，∴ $C(a,3a)$.

∵ 点 C 在反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图象上，∴ $a\cdot 3a=12$，

解得 $a=2$ 或 $a=-2$（舍去），∴ $C(2,6)$.

设直线 l 平移后的解析式为 $y=\frac{2}{3}x+n$，

∴ $\frac{2}{3}\times 2+n=6$，∴ $n=\frac{14}{3}$，

∴ 直线 l 向上平移的距离为 $n-m=\frac{14}{3}-(-2)=\frac{20}{3}$.

11.【解】(1) 由题意得，抛物线的顶点为 $\left(\frac{12}{2},8\right)$，即$(6,8)$，与 x 轴的交点为$(0,0)$，$(12,0)$.

设抛物线的解析式为 $y=a(x-6)^2+8(a\neq0)$.

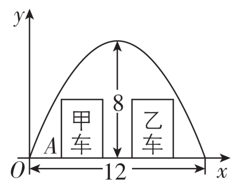
代入 $(12,0)$,得 $a(12-6)^2+8=0$,解得 $a=-\frac{2}{9}$,

∴ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{2}{9}(x-6)^2+8(0\leqslant x\leqslant12)$.

(2)能安全通过.

理由如下:如图,

由题意得 $x_A=\frac{12}{2}-\frac{2}{2}-3=2$.



将 $x_A=2$ 代入 $y=-\frac{2}{9}(x-6)^2+8$,

得 $y=-\frac{2}{9}\times(2-6)^2+8=\frac{40}{9}$.

∵ $\frac{40}{9}-3.5=\frac{17}{18}>0.5$,∴ 能安全通过.

12.【解】(1)①小华在最初的 6 min 内的速度为 $0.6\div6=0.1$(km/min),

当 $x=1$ 时,$y=0.1\times1=0.1$.

当 $x=18$ 时,$y=0.6$. 当 $x=50$ 时,$y=1.8$. 故答案为 0.1,0.6,1.8.(从左到右)

②小华从公园返回家的速度为 $1.8\div15=0.12$(km/min). 故答案为 0.12.

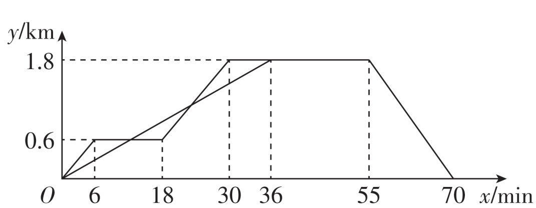
③$y=\begin{cases}0.1x(0\leqslant x\leqslant6),\\0.6(6<x\leqslant18),\\0.1x-1.2(18<x\leqslant30).\end{cases}$

当 $0\leqslant x\leqslant6$ 时,$y=0.1x$;当 $6<x\leqslant18$ 时,$y=0.6$;

当 $18<x\leqslant30$ 时,小华的速度为 $(1.8-0.6)\div12=0.1$(km/min),则 $y=0.6+0.1(x-18)=0.1x-1.2$,∴ 当 $0\leqslant x\leqslant30$ 时,小华离家的距离 y 关于时间 x 的函数解析式为

$y=\begin{cases}0.1x(0\leqslant x\leqslant6),\\0.6(6<x\leqslant18),\\0.1x-1.2(18<x\leqslant30).\end{cases}$

(2)$12<x<24$. 小华的妈妈从家到公园所用时间为 $1.8\div0.05=36$(min),则小华的妈妈离家的距离 y_2 与 x 之间的函数图象如图所示:



y_2 与 x 之间的函数关系式为 $y_2=0.05x(0\leqslant x\leqslant36)$.

当 $6\leqslant x\leqslant18$,且 $y_1=y_2$ 时,得 $0.05x=0.6$,解得 $x=12$;

当 $18<x\leqslant30$,且 $y_1=y_2$ 时,得 $0.1x-1.2=0.05x$,

解得 $x=24$.

由图象可知,当 $y_1<y_2$ 时,x 的取值范围为 $12<x<24$.

13.【解】(1)将 $(2,-1)$ 代入 $y=x^2+bx-1$,得 $-1=4+2b-1$,解得 $b=-2$,∴ 抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-1$.

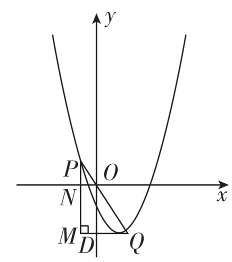
(2)面积比保持不变,面积比为 $\frac{5}{4}\left(\text{或}\frac{4}{5}\right)$.

设 QM 交 y 轴于点 D. 根据题意可得 $\angle M=\angle ODQ=90°$,$\angle Q=\angle Q$,∴ $\triangle QOD\backsim\triangle QPM$. ∵ $\frac{OP}{OQ}=\frac{1}{2}$,∴ $\frac{OQ}{PQ}=\frac{2}{3}$,

∴ $\frac{S_{\triangle QOD}}{S_{\triangle QPM}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$,∴ $\frac{S_{\text{四边形}ODMP}}{S_{\triangle QOD}}=\frac{9-4}{4}=\frac{5}{4}$.

(3)如图(1)所示,设 QM 交 y 轴于 D,PM 交 x 轴于 N. QM 经过抛物线的最低点,即经过抛物线的顶点.

∵ 抛物线解析式为 $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$,点 P 在抛物线上,∴ 该抛物线的顶点坐标为 $(1,-2)$,$P(m,m^2-2m-1)$.



图(1)

由题意易得 $\angle PNO=\angle ODQ=90°$,$\angle NPO=\angle DOQ$,

∴ $\triangle PON\backsim\triangle OQD$,∴ $\frac{OP}{OQ}=\frac{PN}{OD}=\frac{ON}{DQ}=\frac{1}{2}$.

根据顶点纵坐标可得 $OD=2$,∴ $\frac{m^2-2m-1}{2}=\frac{1}{2}$,解得 $m=1\pm\sqrt{3}$.

①当 $m=1-\sqrt{3}$ 时,如图(1),

此时 $|x_Q|=2|x_P|=2\sqrt{3}-2$,

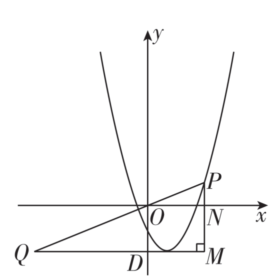
点 Q 在第四象限,故 $Q(2\sqrt{3}-2,-2)$;

②当 $m=1+\sqrt{3}$ 时,如图(2),此时点 P 在第一象限,点 Q 在第三象限,$|x_Q|=2|x_P|=2\sqrt{3}+2$,故 $Q(-2\sqrt{3}-2,-2)$.

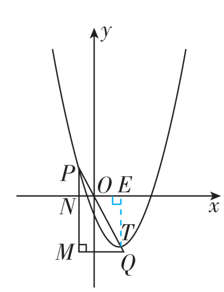
综上,$Q(2\sqrt{3}-2,-2)$ 或 $Q(-2\sqrt{3}-2,-2)$.

关键点拨

本题需结合点 P 横坐标的正、负性,画出 PQ 的两种情况,然后由 P 点的坐标求出 Q 点的坐标.



图(2)



图(3)

(4)$m\leqslant-1$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m<1-\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}<m<1+\sqrt{2}$.

设 PM 交 x 轴于点 N. ①如图(3),设抛物线顶点为 T,则 $T(1,-2)$. 当 PQ 经过抛物线顶点 T 时,过点 T 作 $TE\perp x$ 轴

于点 E,此时 $m<0$.

$\because$ $\angle PNO=\angle TEO=90°$, $\angle PON=\angle TOE$, $\therefore$ $\triangle PON\backsim\triangle TOE$, $\therefore$ $\frac{PN}{ON}=\frac{TE}{OE}$,即 $\frac{m^2-2m-1}{-m}=\frac{2}{1}$,解得 $m=1$(舍去)或 $m=-1$. $\because$ 当点 P 向左运动时,满足题意, $\therefore$ $m\leqslant-1$.

关键点拨

当点 P 向左运动时, $\angle PON$ 与 $\angle EOQ$ 变大,直线越陡,与抛物线的交点在对称轴左侧.

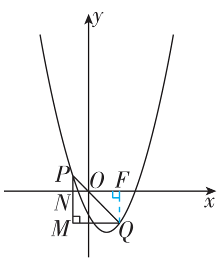
②如图(4),当点 P 在第二象限,点 Q 在抛物线上时,过点 Q 作 $QF\perp x$ 轴于点 F.

同理①可得 $\triangle PON\backsim\triangle QOF$,相似比仍为 $\frac{1}{2}$,

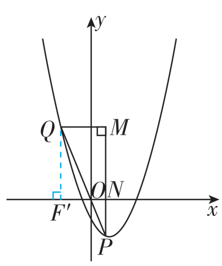
此时, $Q(-2m,-2(m^2-2m-1))$,代入抛物线解析式,得

$-2(m^2-2m-1)=(-2m)^2+4m-1$,

解得 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍去)或 $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 此时,当 P 点向下一直移动,直到无限接近 x 轴时,都符合题意. 当 $x^2-2x-1=0$ 时,解得 $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$(舍去), $\therefore$ 当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m<1-\sqrt{2}$ 时,符合题意.



图(4)



图(5)

③如图(5)所示,当点 P 在第四象限,点 Q 在抛物线上时,点 Q 在第二象限. 过点 Q 作 $QF'\perp x$ 轴于点 F'.

同②可知,此时 $Q(-2m,-2(m^2-2m-1))$,代入抛物线解析式,得 $-2(m^2-2m-1)=(-2m)^2+4m-1$,

解得 $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍去)或 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

此时,当 P 点向右一直移动,直到无限接近 x 轴时,都符合题意, $\therefore$ 当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<m<1+\sqrt{2}$ 时,符合题意.

综上, m 的取值范围为 $m\leqslant-1$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m<1-\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}<m<1+\sqrt{2}$.

B 考点突破练

考点 10 函数及其图象

刷基础

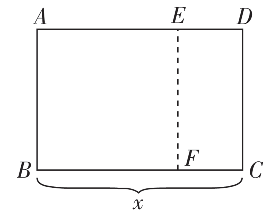
1. A 【解析】由题意得,点 C 的坐标为 $(5,-4)$,故选 A.

2. A 【解析】$\because$ 点 $P(-1,-2)$ 关于原点对称的点的坐标为 $(1,2)$, $\therefore$ 在平面直角坐标系中,点 $P(-1,-2)$ 关于原点对称的点在第一象限,故选 A.

3. $(8,-5)$ 【解析】$\because$ 将平面直角坐标系向左平移 6 个单位长度,再向上平移 4 个单位长度,相当于将点 $A(2,-1)$ 向右平移 6 个单位长度,再向下平移 4 个单位长度, $\therefore$ 点 A 的坐标为 $(8,-5)$,故答案为 $(8,-5)$.

4. $x\geqslant3$ 【解析】由题意可得 $x-3\geqslant0$ 且 $x+2\neq0$,解得 $x\geqslant3$,故答案为 $x\geqslant3$.

5. $y=2x$ 【解析】如图. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,四边形 $ABFE$ 是正方形, $\therefore$ $AD=BC=x$, $EF=CD=AE=BF$, $\therefore$ 剩余矩形的周长为 $(EF+DE)+(CD+CF)=(AE+DE)+(BF+CF)=AD+BC=x+x=2x$, $\therefore$ y 与 x 之间的关系式为 $y=2x$. 故答案为 $y=2x$.



6. C 【解析】将常温中的温度计插入一杯 60 ℃ 的热水(恒温)中,温度计的读数 y(℃)与时间 x(min)的关系对应图象应是 C 选项,故选 C.

方法技巧

解决函数图象分析类问题的注意点

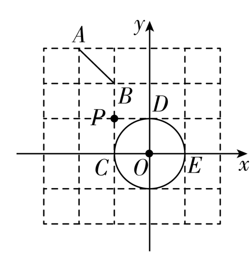
①函数图象中点的横、纵坐标代表的量及函数中自变量的取值范围. ②分段函数要分段讨论. ③转折点:函数图象的倾斜方向或函数增减性发生变化的特殊点.

7. D 【解析】由题意得,当加入絮凝剂的体积为 0.6 mL 时,净水率比加入絮凝剂的体积为 0.5 mL 时低,故选项 A 说法错误,不符合题意;未加入絮凝剂时,净水率为 12.48%,故选项 B 说法错误,不符合题意;絮凝剂的体积每增加 0.1 mL,净水率的增加量不都相等,故选项 C 说法错误,不符合题意;加入絮凝剂的体积是 0.2 mL 时,净水率达到 76.54%,故选项 D 说法正确,符合题意. 故选 D.

刷提升

1. D 【解析】由题可知,点 A_{10} 的坐标为 $(1,0)$,则 $y_{10}=0$. 因为函数图象关于点 $(1,0)$ 中心对称,所以 $y_9+y_{11}=y_8+y_{12}=\cdots=y_1+y_{19}=0$. 将 $x=2$ 代入函数解析式得, $y=2^3-3\times2^2+3\times2-1=1$,即 $y_{20}=1$,所以 $y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{19}+y_{20}=1$. 故选 D.

2. B 【解析】$\because$ $P(-1,1)$, $B(-1,2)$, $\therefore$ $PB=1$. 如图, $\because$ $\odot O$ 的半径为 1, $\therefore$ $C(-1,0)$, $D(0,1)$, $E(1,0)$ 都在 $\odot O$ 上. $\because$ $PC=PD=1$, $\therefore$ 劣弧 CD 上任意一点(不包括端点)到点 P 的距离都小于 1,优弧 CED 上任意



一点(不包括端点)到点 P 的距离都大于 1,∴ 点 B 的对应点 B_1 只能在 C 或 D 这两个位置. 同理可得点 A 的对应点 A_1 只能在 E 或$(0,-1)$这两个位置,∴ $A_1(0,-1)$,$B_1(-1,0)$或 $A_1(1,0)$,$B_1(0,1)$. 当 $A_1(0,-1)$,$B_1(-1,0)$时,旋转角为 180 度,符合题意;当 $A_1(1,0)$,$B_1(0,1)$时,点 A 旋转到其对应点时的旋转角度大于 90 度,点 B 旋转到其对应点时的旋转角度为 90 度,不符合题意,∴ $A_1(0,-1)$,$B_1(-1,0)$,故选 B.

3. B 【解析】①∵ 乙比甲晚出发 30 min,且当 $x=50$ 时,$y=0$,此时甲、乙两人第一次相遇,∴ 乙出发 $50-30=20$(min)时,两人第一次相遇,即甲、乙两人第一次相遇时,乙的锻炼用时为 20 min,故结论①正确. ②观察函数图象,可知当 $x=86$ 时,y 取得最大值,最大值为 3 600,∴ 甲出发 86 min 时,甲、乙两人之间的距离达到最大值 3 600 m,故结论②正确. ③设甲的速度为 x m/min,乙的速度为 y m/min. 根据题意得 $\begin{cases}(50-10)x=(50-30)y,\\(86-30)y-(86-10)x=3\ 600,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=100,\\y=200,\end{cases}$ ∴ $86+\dfrac{3\ 600}{x+y}=86+\dfrac{3\ 600}{100+200}=98$,∴ 甲、乙两人第二次相遇的时间是在甲出发后 98 min,故结论③错误. ④∵ $200\times(86-30)=11\ 200$(m),∴ A,B 两地之间的距离是 11 200 m,故结论④正确. 综上所述,正确的结论有①②④. 故选 B.

刷 素养

4.【解】(1)第一摞有 4 个碗,高度是 10. 5 cm,第二摞有 7 个碗,高度是 15 cm,∴ 每增加一个碗增加的高度为$(15-10.5)\div(7-4)=1.5$(cm),∴ 最下面的碗的高度是 $10.5-1.5\times3=6$(cm),故答案为 6,1. 5.

(2)$y=6+(x-1)\times1.5=1.5x+4.5$.

当 $y=100$ 时,$1.5x+4.5=100$,解得 $x=\dfrac{191}{3}$.

∵ $\dfrac{191}{3}$不是整数,∴ 这摞碗的高度不能是 1 m.

(3)当 $y\geqslant150$ 时,$1.5x+4.5\geqslant150$,解得 $x\geqslant97$,∴ 若这摞碗的高度不低于 1. 5 m,则这摞碗不少于 97 个,∴ 买这摞碗至少需要 $97\times2=194$(元).

考点 11　一次函数

刷 基础

1. B 【解析】∵ 点$(-1,5)$,$(1,-1)$在该函数的图象上,∴ $\begin{cases}-k+b=5,\\k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-3,\\b=2,\end{cases}$ ∴ $y=-3x+2$. ∵ $k=-3<0$,∴ y 随着 x 的增大而减小,故选项 A 正确,不符合题意. 一次函数 $y=-3x+2$ 的图象与正比例函数 $y=-3x$ 的图象平行,故选项 B 不正确,符合题意. ∵ 当 $x=0$ 时,$y=2$,∴ 一次函数 $y=-3x+2$ 的图象与 y 轴交于点$(0,2)$,故选项 C 正确,不符合题意. ∵ 一次函数 $y=-3x+2$ 中,$k=-3<0$,$b=2>0$,∴ 该函数的图象经过第一、二、四象限,故选项 D 正确,不符合题意. 故选 B.

2. D 【解析】

一次函数$y=x+1$

$k=1>0$　　$b=1>0$

图象经过第一、三象限　　图象经过第一、二象限

图象经过第一、二、三象限

故选 D.

3. A 【解析】∵ 点 A 与点 B 关于原点对称,∴ $m=6$,$n=-2$,∴ $A(2,6)$,$B(-2,-6)$. 设正比例函数的解析式为 $y=kx(k\neq0)$. 把 $A(2,6)$代入,得 $k=3$,∴ $y=3x$. 故选 A.

4. A 【解析】∵ 某种蛇在一定生长阶段,其体长 y(cm)是尾长 x(cm)的一次函数,∴ 设 y 与 x 之间的关系式为 $y=kx+b$. 根据题意得 $\begin{cases}6k+b=45.5,\\8k+b=60.5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=7.5,\\b=0.5,\end{cases}$ ∴ y 与 x 之间的关系式为 $y=7.5x+0.5$. 故选 A.

5. $y=-\dfrac{1}{3}x+5$ 【解析】一次函数 $y=-\dfrac{1}{3}x+2$ 的图象向上平移 a 个单位后得到图象对应的解析式为 $y=-\dfrac{1}{3}x+2+a$. ∵ 平移后的图象经过点$(-3,2a)$,∴ $2a=1+2+a$,∴ $a=3$,∴ 平移后图象对应的解析式为 $y=-\dfrac{1}{3}x+5$. 故答案为 $y=-\dfrac{1}{3}x+5$.

6. A 【解析】观察题图可知 $y=kx+b$ 的图象经过点$(3,0)$,即当 $x=3$ 时,$kx+b=0$,∴ 关于 x 的方程 $kx+b=0$ 的解为 $x=3$,故选 A.

7. $x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 【解析】将点$(n,6)$代入 $y_1=2x+3$,得 $n=\dfrac{3}{2}$,由函数图象可知,当 $x\leqslant\dfrac{3}{2}$时,一次函数 $y_1=2x+3$ 的图象在一次函数 $y_2=kx+b$ 图象的下方或两图象相交,所以关于 x 的不等式 $kx+b\geqslant2x+3$ 的解集为 $x\leqslant\dfrac{3}{2}$. 故答案为 $x\leqslant\dfrac{3}{2}$.

方法技巧

一次函数与一元一次不等式的关系

求不等式 $kx+b>0$(或<0)的解集,从函数的角度看,就是求使一次函数 $y=kx+b$ 的值大于 0(或小于 0)的自变量 x 的取值范围;从函数图象的角度看,就是确定直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上方(或下方)部分所有点的横坐标.

刷 易错

8. 2 或−7 【解析】当 $k>0$ 时,y 随 x 的增大而增大. ∵ 当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时,$3\leqslant y\leqslant 6$,∴ 当 $x=1$ 时,$y=3$;当 $x=4$ 时,$y=6$,∴ $\begin{cases}k+b=3,\\4k+b=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=2,\end{cases}$ ∴ $\dfrac{b}{k}=2$. 当 $k<0$ 时,y 随 x 的增大而减小. ∵ 当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时,$3\leqslant y\leqslant 6$,∴ 当 $x=1$ 时,$y=6$;当 $x=4$ 时,$y=3$,∴ $\begin{cases}k+b=6,\\4k+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=7,\end{cases}$ ∴ $\dfrac{b}{k}=-7$. 故答案为 2 或−7.

易错警示

由于 k 的符号不能确定,故应分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况进行解答,不要漏解.

刷 提升

1. B 【解析】由题知,因为一次函数 $y=kx+b$(k,b 为常数,且 $k\neq 0$)的图象不经过第二象限,所以 $k>0$,所以 y 随 x 的增大而增大. 又因为点 $(2,m)$,$(7,n)$ 均在该函数图象上,且 $2<7$,所以 $m<n$,所以 $m-n<0$. 故选 B.

2. A 【解析】设直线 FG 的解析式为 $y=kx+b$. ∵ $F(-1,1)$,$G(0,-1)$,∴ $\begin{cases}1=-k+b,\\-1=b,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}k=-2,\\b=-1,\end{cases}$ ∴ 直线 FG 的解析式为 $y=-2x-1$. 由题可得 $E(1,2)$. A 选项,当 E 平移后的坐标为 $\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{11}{5}\right)$ 时,平移方式为向右平移 $\dfrac{2}{5}$ 个单位,向上平移 $\dfrac{1}{5}$ 个单位,∴ 直线 FG 平移后的解析式为 $y=-2\left(x-\dfrac{2}{5}\right)-1+\dfrac{1}{5}=-2x$,此时 FG 经过原点,FE 经过整点 $(1,2)$,EH 经过整点 $(2,1)$,GH 经过整点 $(2,0)$,结合图形易知此时符合题意. B 选项,当 E 平移后的坐标为 $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{23}{10}\right)$ 时,平移方式为向右平移 $\dfrac{3}{5}$ 个单位,向上平移 $\dfrac{3}{10}$ 个单位,∴ 直线 FG 平移后的解析式为 $y=-2\left(x-\dfrac{3}{5}\right)-1+\dfrac{3}{10}=-2x+\dfrac{1}{2}$,此时原点在 FG 下方,EH 在整点 $(2,1)$ 上方,结合图形易知此时不符合题意. C 选项,当 E 平移后的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ 时,平移方式为向右平移 $\dfrac{1}{2}$ 个单位,结合图形易知此时整点 $(2,0)$ 在正方形 $EFGH$ 内部,不符合题意. D 选项,当 E 平移后的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ 时,平移方式为向右平移 $\dfrac{1}{2}$ 个单位,向上平移 $\dfrac{1}{4}$ 个单位,∴ 直线 FG 平移后的解析式为 $y=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-1+\dfrac{1}{4}=-2x+\dfrac{1}{4}$,结合图形易知此时整点 $(2,1)$ 在正方形 $EFGH$ 内部,不符合题意. 故选 A.

3.【解】(1)∵ 在平面直角坐标系 xOy 中,函数 $y=kx+b$($k\neq 0$)的图象经过点 $(1,3)$ 和 $(2,5)$,∴ $\begin{cases}k+b=3,\\2k+b=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=1.\end{cases}$

(2) $2\leqslant m\leqslant 3$.

由(1)可得函数 $y=kx+b$($k\neq 0$)的解析式为 $y=2x+1$,函数 $y=x+k$ 的解析式为 $y=x+2$.

当 $mx<2x+1$ 时,有 $(m-2)x<1$,当 $mx<x+2$ 时,有 $(m-1)x<2$.

∵ 当 $x<1$ 时,对于 x 的每一个值,函数 $y=mx$($m\neq 0$)的值既小于函数 $y=kx+b$ 的值,也小于函数 $y=x+k$ 的值,

∴ $m-2\geqslant 0$,且 $m-1\geqslant 0$,∴ $m\geqslant 2$.

①当 $m=2$,$x<1$ 时,$2x<2x+1$ 和 $2x<x+2$ 恒成立,故 $m=2$ 符合题意;

②当 $m>2$ 时,$x<\dfrac{1}{m-2}$ 且 $x<\dfrac{2}{m-1}$,当 $\dfrac{1}{m-2}\geqslant\dfrac{2}{m-1}$,即 $m\leqslant 3$ 时,有 $\dfrac{2}{m-1}\geqslant 1$,解得 $m\leqslant 3$,符合题意,∴ $2<m\leqslant 3$.

当 $\dfrac{1}{m-2}<\dfrac{2}{m-1}$,即 $m>3$ 时,有 $\dfrac{1}{m-2}\geqslant 1$,解得 $m\leqslant 3$,此时不符合题意.

综上所述,$2\leqslant m\leqslant 3$.

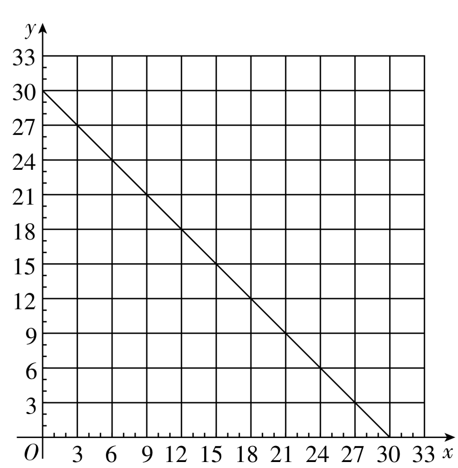
刷 素养

4.【解】(1)设 l_1 的解析式为 $y=kx+b$($k\neq 0$). 把点 $M(6,0)$,点 $N(0,6)$ 代入 $y=kx+b$,得 $\begin{cases}6k+b=0,\\b=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=6,\end{cases}$

∴ 直线 l_1 的解析式为 $y=-x+6$. 将直线 l_1 向上平移 9 个单位长度得到的直线 l_2 的解析式为 $y=-x+15$.

(2)①∵ 点 P 按照甲方式移动了 m 次,点 P 从原点 O 出发连续移动 10 次,∴ 点 P 按照乙方式移动了 $(10-m)$ 次,∴ 点 P 按照甲方式移动 m 次后得到的点的横坐标为 $3m$,点 P 按照乙方式移动 $(10-m)$ 次后得到的点的纵坐标为 $3(10-m)=30-3m$,∴ 点 P 从原点 O 出发连续移动 10 次后的坐标为 $(3m,30-3m)$,∴ $x=3m$,$y=30-3m$.

②∵ $x+y=3m+30-3m=30$,即 $y=30-x$,∴ 无论 m 怎样变化,点 $Q(x,y)$ 都在一条确定的直线上,这条直线 l_3 的解析式为 $y=-x+30$. 直线 l_3 如图所示:



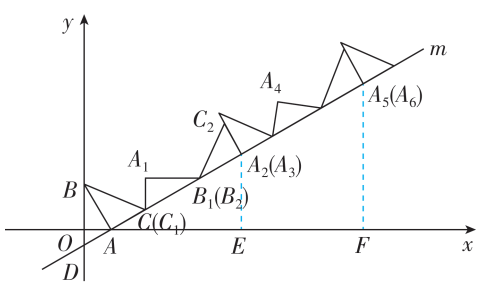
专题13 规律探究（二）

刷 难关

1. (1 014,0)　【解析】由题意可知每 4 个点为一组，则第 $(n+1)$ $(n\geqslant 0$ 且 n 为整数$)$ 组的四个点分别为 $A_{4n+1}(2n+2,0)$，$A_{4n+2}(1,-2n-1)$，$A_{4n+3}(-2n,0)$，$A_{4n+4}(2,2n+2)$. ∵ $2\,025\div 4=506\cdots\cdots 1$，∴ 点 $A_{2\,025}$ 的纵坐标是 0，横坐标是 $2\times 506+2=1\,014$，∴ 点 $A_{2\,025}$ 的坐标为 $(1\,014,0)$. 故答案为 $(1\,014,0)$.

2. D　【解析】根据题意可知动点从原点 O 出发，按向下→向右→向上→向上→向右→向下…的方向依次不断移动，每六个点重复一次相同方向. ∵ $2\,025\div 6=337\cdots\cdots 3$，∴ 点 $A_{2\,025}$ 在 x 轴上，纵坐标为 0. ∵ $A_3(1,0)$，$A_6(2,0)$，$A_9(3,0)$，$A_{12}(4,0)$，$A_{15}(5,0)$，…，∴ 点 $A_{2\,025}$ 的横坐标为 $2\,025\div 3=675$，∴ $A_{2\,025}$ 的坐标为 $(675,0)$，故选 D.

3. 2 004　【解析】如图，设直线 m 与 y 轴交于点 D，分别过 A_2，A_5 作 $A_2E\perp x$ 轴，$A_5F\perp x$ 轴，垂足分别为点 E，F.



由直线 m：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 得，当 $x=0$ 时，$y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，∴ 点 $D\left(0,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，∴ $OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ∵ $A(2,0)$，$B(0,2\sqrt{3})$，∴ $OA=2$，$OB=2\sqrt{3}$，由勾股定理得 $AB=\sqrt{OB^2+OA^2}=4$. ∵ $\tan\angle OAD=\frac{OD}{OA}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan\angle OAB=\frac{OB}{OA}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，∴ $\angle OAD=\angle CAE=30^\circ$，$\angle OAB=60^\circ$，∴ $\angle BAC=90^\circ$，∴ $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. 由旋转性质可知 $C_1B_1=BC=5$，$B_1A_2=AB=4$，∴ $AA_2=AC+CB_1+B_1A_2=12$，∴ $A_2E=\frac{1}{2}AA_2=6$，即 $A_2(A_3)$ 的纵坐标为 6，同理可得 $A_5(A_6)$ 的纵坐标为 12. ∵ $A_{1\,001}=A_{3\times 333+2}$，∴ $A_{1\,001}$ 在直线 m 上，∴ $A_{1\,001}(A_{1\,002})$ 的纵坐标为 $334\times 6=2\,004$，故答案为 2 004.

4. $2^{4\,039}\sqrt{3}$　【解析】∵ 直线 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 分别与 x 轴和 y 轴交于 A，B 两点，∴ $A(-1,0)$，$B(0,\sqrt{3})$，∴ $OA=1$，$OB=\sqrt{3}$，∴ $\tan\angle OAB=\frac{OB}{OA}=\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2$，∴ $\angle OAB=60^\circ$. ∵ $A_1B\perp AB$，∴ $A_1B=\sqrt{3}AB=2\sqrt{3}$，∴ $S_{\triangle AA_1B}=\frac{1}{2}AB\cdot A_1B=2\sqrt{3}$. ∵ $\angle AA_1B_1=\angle ABA_1=90^\circ$，$\angle A_1AB=\angle B_1AA_1$，∴ $\triangle AA_1B\backsim\triangle AB_1A_1$. ∵ $\frac{AA_1}{AB_1}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{S_{\triangle AA_1B}}{S_{\triangle AA_1B_1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，∴ $S_{\triangle AA_1B_1}=4\times 2\sqrt{3}=2^2\cdot 2\sqrt{3}$，即第 2 个直角三角形的面积为 $2^2\cdot 2\sqrt{3}$，同理可得第 3 个直角三角形的面积为 $2^4\cdot 2\sqrt{3}$，第 4 个直角三角形的面积为 $2^6\cdot 2\sqrt{3}$，…，以此类推，第 n 个直角三角形的面积为 $2^{2(n-1)}\cdot 2\sqrt{3}=2^{2n-1}\sqrt{3}$，∴ 第 2 020 个直角三角形的面积为 $2^{2\,020\times 2-1}\sqrt{3}=2^{4\,039}\sqrt{3}$，故答案为 $2^{4\,039}\sqrt{3}$.

5. D　【解析】根据题意可得 $x=-201.8$ 时，$y_1=[-201.8]=-202$；$x=-201.6$ 时，$y_2=[-201.6]=-202$；$x=-201.4$ 时，$y_3=[-201.4]=-202$；$x=-201.2$ 时，$y_4=[-201.2]=-202$；$x=-201$ 时，$y_5=[-201]=-201$，…. 以此类推，y 值结果如下：

−202,−202,−202,−202,
−201,−201,−201,−201,−201,
−200,−200,−200,−200,−200,
…
−2,−2,−2,−2,−2,
−1,−1,−1,−1,−1,
0,0,0,0,0,
1,1,1,1,1,
2,2,2,2,2,
…
200,200,200,200,200,
201,201,201,201,201,
202,202,202,202,202,
203.

所以 $y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+y_n=202+203=405$. 故选 D.

考点 12　一次函数的实际应用

刷 基础

1.【解】(1) 由题意可得 $a=20\div 100=\frac{1}{5}$，即 $a=\frac{1}{5}$.

故答案为 $\frac{1}{5}$.

(2) 当 $\frac{1}{12}\leqslant x\leqslant\frac{1}{5}$ 时，设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$.

∵ 图象过 $\left(\frac{1}{6},17\right)$ 和 $\left(\frac{1}{5},20\right)$ 两点，

∴ $\begin{cases}\frac{1}{6}k+b=17,\\ \frac{1}{5}k+b=20,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=90,\\ b=2,\end{cases}$

∴ $y=90x+2\left(\frac{1}{12}\leqslant x\leqslant\frac{1}{5}\right)$.

(3) 当 $x=\frac{1}{12}$ 时，$y=90\times\frac{1}{12}+2=9.5$，

∴ 先匀速行驶 $\frac{1}{12}$ 小时的速度为 $9.5\div\frac{1}{12}=114$（千米/时）.

∵ $114<120$，∴ 该辆汽车减速前没有超速.

方法技巧

解决图象型分段函数问题的一般思路

①找特殊点，即图象的起点、终点或转折点；

②根据函数图象的特征判断函数的类型，利用待定系数法求相应的函数解析式；

③根据题目要求解决实际问题.

2.【解】(1)根据题意，得$\begin{cases}8a+7b=670,\\4a+5b=410,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=40,\\b=50,\end{cases}$

∴ a 的值是 40，b 的值是 50.

(2)购买 B 种型号吉祥物的数量为$(90-x)$个.

根据题意，得$\begin{cases}x\geqslant\frac{4}{3}(90-x),\\x\leqslant2(90-x),\end{cases}$解得$\frac{360}{7}\leqslant x\leqslant60.$

$y=(40-35)x+(50-42)(90-x)=-3x+720.$

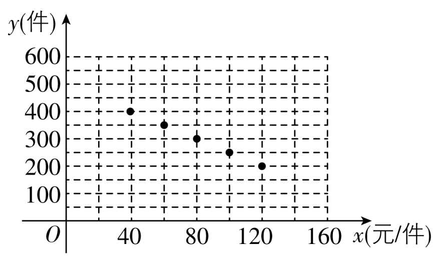
∵ $-3<0$，∴ y 随 x 的增大而减小.

∵ $\frac{360}{7}\leqslant x\leqslant60$ 且 x 为整数，

∴ 当 $x=52$ 时，y 的值最大，$y_{最大}=-3\times52+720=564$，

∴ y 的最大值是 564.

3.【解】(1)描出各点如图所示：



若每周销售量 y(件)与销售单价 x(元/件)符合初中学习过的某种函数关系，则可能是一次函数关系，故答案为一次.

(2)设 y 关于 x 的函数解析式为 $y=kx+b$(k,b 为常数，$k\neq0$).

把$(40,400)$，$(60,350)$代入，得$\begin{cases}40k+b=400,\\60k+b=350,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\frac{5}{2},\\b=500,\end{cases}$

∴ y 关于 x 的函数解析式为 $y=-\frac{5}{2}x+500.$

(3)当 $x=140$ 时，$y=-\frac{5}{2}\times140+500=150$，∴ 当销售单价定为 140 元/件时，这种无人机的每周销售量为 150 件.

4.【解】任务一：设每个篮球的价格是 x 元，每个排球的价格是 y 元. 根据题意得$\begin{cases}2x=3y,\\2x+5y=800,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=150,\\y=100.\end{cases}$

答：每个篮球的价格是 150 元，每个排球的价格是 100 元.

任务二：设购买 m 个篮球，该校购买篮球和排球共花费 w 元，则购买$(60-m)$个排球.

根据题意得 $w=150m+100(60-m)=50m+6\ 000.$

∵ $50>0$，∴ w 随 m 的增大而增大.

又∵ $60-m\leqslant2m$，解得 $m\geqslant20$，

∴ 当 $m=20$ 时，w 取得最小值，此时 $60-m=60-20=40.$

答：最节省费用的购买方案为购买 20 个篮球，40 个排球.

刷 提升

1. D 【解析】根据题图(2)可得当 $H=2$ 时，R_1 的电阻值为 300 Ω，故 A 选项正确，不符合题意. 根据题图(2)可得 R_1 随着水位的升高而增大，故 B 选项正确，不符合题意. 根据题图(2)可得当 $0\leqslant H\leqslant0.5$ 时，R_1 与 H 之间符合一次函数关系，故设 R_1 与 H 之间的关系式为 $R_1=aH+b(0\leqslant H\leqslant0.5)$. 将$(0,50)$，$(0.5,200)$代入，得$\begin{cases}50=b,\\200=0.5a+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=50,\\a=300,\end{cases}$即 R_1 与 H 之间的关系式为 $R_1=50+300H(0\leqslant H\leqslant0.5)$，故 C 选项正确，不符合题意. 当 R_1 的电阻值为 150 Ω 时，$0\leqslant H\leqslant0.5$，∴ 将 $R_1=150$ 代入 $R_1=50+300H$，得 $150=50+300H$，解得 $H=\frac{1}{3}$，即 R_1 的电阻值为 150 Ω 时，水位的高度 H 为 $\frac{1}{3}$ m，故 D 选项错误，符合题意. 故选 D.

刷 素养

2.【解】(1)设 $y_1=k_1x+b_1$(k_1,b_1 为常数，且 $k_1\neq0$).

将 $x=8$，$y_1=200$ 和 $x=11$，$y_1=320$ 代入 $y_1=k_1x+b_1$，

得$\begin{cases}8k_1+b_1=200,\\11k_1+b_1=320,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_1=40,\\b_1=-120,\end{cases}$∴ $y_1=40x-120.$

设 $y_2=k_2x+b_2$(k_2,b_2 为常数，且 $k_2\neq0$).

将 $x=8$，$y_2=500$ 和 $x=11$，$y_2=440$ 代入 $y_2=k_2x+b_2$，

得$\begin{cases}8k_2+b_2=500,\\11k_2+b_2=440,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_2=-20,\\b_2=660,\end{cases}$∴ $y_2=-20x+660.$

(2)8 时到 9 时，借用自东向西车道自西向东通行；

18 时到 20 时，借用自西向东车道自东向西通行.

理由：

$y_总=y_1+y_2=40x-120-20x+660=20x+540.$

当 $y_1\geqslant\frac{2}{3}y_总$ 时，$40x-120\geqslant\frac{2}{3}(20x+540)$，解得 $x\geqslant18$；

当 $y_2\geqslant\frac{2}{3}y_总$ 时，$-20x+660\geqslant\frac{2}{3}(20x+540)$，解得 $x\leqslant9.$

∴ 8 时到 9 时，借用自东向西车道自西向东通行；

18 时到 20 时，借用自西向东车道自东向西通行.

考点 13　反比例函数

刷 基础

1. C 【解析】∵ $k=-7<0$，∴ 反比例函数 $y=\frac{-7}{x}$ 的图象在第二、四象限，且在每一象限内 y 随 x 的增大而增大. 故选 C.

刷有所得

反比例函数的图象性质

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，当 $k>0$ 时，图象位于第一、三象限，在每个象限内，y 随 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，图象位于第二、四象限，在每个象限内，y 随 x 的增大而增大．反比例函数的图象是双曲线，与坐标轴没有交点．

2. C 【解析】将 $x=1$ 代入 $y=kx-k(k\neq0)$ 得，$y=k-k=0$，∴ 函数 $y=kx-k(k\neq0)$ 的图象过定点 $(1,0)$，故 B 选项不符合题意．当 $k>0$ 时，对于函数 $y=kx-k(k\neq0)$，y 随 x 的增大而增大；当 $k>0$ 时，$y=\frac{k}{|x|}>0$，∴ 此函数的图象都在 x 轴的上方，故 A 选项、D 选项不符合题意，C 选项符合题意．故选 C．

3. B 【解析】∵ $y=-\frac{3}{x}$ 的图象分别位于第二、第四象限，∴ 当 $x_2<0<x_1$ 时，$y_1<0<y_2$，故选 B．

4. C 【解析】A 选项，若 $k>0$，则反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象分别位于第一、第三象限，且在每一象限内，y 随 x 的增大而减小．∵ 无法确定点 A,B 所在象限，∴ 无法判断出 $m<0$，故该选项错误，不符合题意．B 选项，若 $k<0$，则反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象分别位于第二、第四象限，且在每一象限内，y 随 x 的增大而增大．∵ 无法确定点 A,B 所在象限，∴ 无法判断出 $m>0$，故该选项错误，不符合题意．C 选项，若 $k>0$，则反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象分别位于第一、第三象限，且在每一象限内，y 随 x 的增大而减小．∵ 点 A,B 在同一象限，且 $y_1<y_1+3$，∴ $m<0$，故该选项正确，符合题意．D 选项，若 $k<0$，则反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象分别位于第二、第四象限，且在每一象限内，y 随 x 的增大而增大．∵ 点 A,B 不在同一象限，且 $y_1<y_1+3$，∴ $m<0$，故该选项错误，不符合题意．故选 C．

5. B 【解析】设反比例函数的解析式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$．把 $A(2m+1,2)$，$B\left(6,\frac{m}{2}\right)$ 分别代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $\frac{k}{2m+1}=2$，$\frac{k}{6}=\frac{m}{2}$，∴ $k=2(2m+1)=6\times\frac{m}{2}$，解得 $m=-2$，∴ $k=6\times\frac{-2}{2}=-6$，∴ 反比例函数的解析式为 $y=-\frac{6}{x}$，故选 B．

6. $y=\frac{128}{x}(x>0)$ 【解析】根据题意设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{k}{x}(x>0)$．∵ 图象过点 $(0.04,3\ 200)$，∴ $k=xy=0.04\times3\ 200=128$，∴ $y=\frac{128}{x}(x>0)$．故答案为 $y=\frac{128}{x}(x>0)$．

7. -6 【解析】∵ 四边形 $ABCO$ 是平行四边形，∴ 点 A,B 的纵坐标相同．∵ $B(-1,3)$，∴ 点 A 的纵坐标是 3．∵ A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x<0)$ 的图象上，∴ 将 $y=3$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $x=\frac{k}{3}$，∴ $A\left(\frac{k}{3},3\right)$，∴ $AB=-1-\frac{k}{3}$．∵ $S_{\square ABCO}=3$，点 B 的纵坐标是 3，∴ $AB\times3=3$，∴ $\left(-1-\frac{k}{3}\right)\times3=3$，∴ $k=-6$，故答案为 -6．

8. 4.5 【解析】∵ 点 A,D 分别在函数 $y=-\frac{3}{x}(x<0)$，$y=\frac{6}{x}(x>0)$ 的图象上，∴ $S_{矩形ABCD}=3+6=9$，∴ $S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}=4.5$，故答案为 4.5．

刷提升

1. D 【解析】∵ $-3<0$，∴ 在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大，且第二象限的函数值大于第四象限的函数值．∵ $m<m+1$，∴ 当 $m<m+1<0$，即 $m<-1$ 时，$y_1<y_2$；当 $0<m<m+1$，即 $m>0$ 时，$y_1<y_2$；当 $m<0<m+1$，即 $-1<m<0$ 时，$y_1>y_2$．观察各选项可知，只有选项 D 正确，故选 D．

关键点拨

根据反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的增减性，分情况讨论 m 的取值范围，比较 y_1 和 y_2 的大小关系即可．

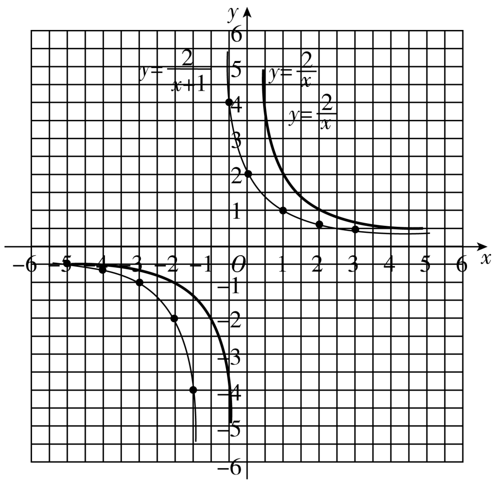
2. B 【解析】∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$，∴ 其图象分布在第二、四象限，且在每个象限内，y 随 x 的增大而增大．∵ 当 $2\leqslant x\leqslant3$ 时，函数 y 的最小值为 a，∴ 当 $x=2$ 时，$\frac{k}{2}=a$，∴ $k=2a$，∴ $y=\frac{2a}{x}$，∴ 当 $-2\leqslant x\leqslant-1$ 时，函数 y 的最小值为 $\frac{2a}{-2}=-a$，最大值为 $\frac{2a}{-1}=-2a$．故选 B．

3. D 【解析】∵ 点 $A(2,3)$ 在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，∴ $k=2\times3=6$，∴ 函数的解析式为 $y=\frac{6}{x}(x>0)$，故 A 正确，不合题意．∵ $k=6>0$，∴ 矩形 $OCBD$ 的面积为 6，故 B 正确，不合题意．∵ 当 $x<0$ 时，函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象在第三象限，且 y 随 x 的增大而减小，故 C 正确，不合题意．∵ 点 $A(2,3)$ 和点 $B(a,b)$ 在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，且点 B 在点 A 的右侧，∴ $0<b<3$，故 D 错误，符合题意．故选 D．

4. 0 【解析】∵ 函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象经过点 $(3,y_1)$ 和 $(-3,y_2)$，∴ $y_1=\frac{k}{3}$，$y_2=-\frac{k}{3}$，∴ $y_1+y_2=\frac{k}{3}-\frac{k}{3}=0$，故答案为 0．

刷 素养

5.【动手操作】描点，连线画出函数图象如图所示：



【探究发现】

(1)函数 $y=\frac{2}{x+1}$的图象可以看成是由函数 $y=\frac{2}{x}$的图象向左平移 1 个单位长度得到的，故答案为左，1.

(2)上述探究方法运用的数学思想是类比思想，故选 B.

【应用延伸】

(1)函数 $y=-\frac{1}{x-2}-1$ 的图象可以看成是由函数 $y=-\frac{1}{x}$的图象先向右平移 2 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度(或先向下平移 1 个单位长度，再向右平移 2 个单位长度)得到的，故答案为向右平移 2 个单位长度，向下平移 1 个单位长度(或向下平移 1 个单位长度，向右平移 2 个单位长度).

(2)根据平移的性质，可得函数 $y=-\frac{1}{x-2}-1$ 图象的对称中心的坐标为(2，-1)，故答案为(2，-1).

重难专题 4 反比例函数中 k 的几何意义

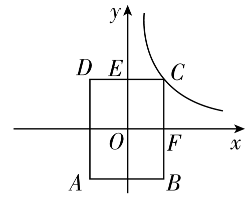
刷 难关

1. 8 【解析】如图，设 BC 与 x 轴的交点为 F，CD 与 y 轴的交点为 E. ∵ 点 C 在函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$的图象上，∴ 矩形 $CEOF$ 的面积为 2. 依题意得 $S_{矩形ABCD}=4S_{矩形CEOF}$，∴ 矩形 $ABCD$ 的面积为 $2\times4=8$，故答案为 8.

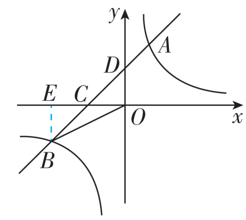
方法技巧

反比例函数中 k 的几何意义

在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$图象上任取一点，过这个点向 x 轴和 y 轴分别作垂线，它们与坐标轴围成的矩形的面积是定值$|k|$. 过反比例函数图象上任意一点向坐标轴作垂线，以该点和垂足以及坐标原点为顶点的三角形的面积是定值$\frac{1}{2}|k|$.



(第 1 题图)

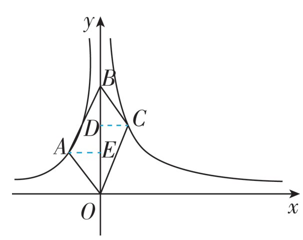


(第 2 题图)

2. 4 【解析】如图，过点 B 作 $BE\perp x$ 轴，垂足为 E. ∵ $S_{\triangle BCO}=S_{\triangle DCO}=1$，∴ $BC=DC$. 在 $\triangle BEC$ 和 $\triangle DOC$ 中，
$\begin{cases}\angle BEC=\angle DOC=90^\circ,\\ \angle ECB=\angle OCD,\\ BC=DC,\end{cases}$ ∴ $\triangle BEC\cong\triangle DOC$(AAS)，∴ $S_{\triangle BEC}=S_{\triangle DOC}=1$，∴ $S_{\triangle OBE}=S_{\triangle BCO}+S_{\triangle BEC}=1+1=2$，∴ $|k|=2S_{\triangle OBE}=4$. ∵ $k>0$，∴ $k=4$. 故答案为 4.

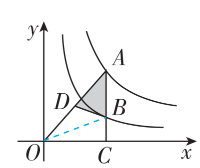
3. 8 【解析】∵ A，B 两点在反比例函数 $y=\frac{6}{x}(x>0)$的图象上，∴ $S_1+S_{阴影}=S_2+S_{阴影}=6$，∴ $S_1=S_2=6-2=4$，∴ $S_1+S_2=8$. 故答案为 8.

4. B 【解析】如图，过点 A 作 $AE\perp y$ 轴于点 E，过点 C 作 $CD\perp y$ 轴于点 D，则$\angle AEB=\angle CDO=90^\circ$.

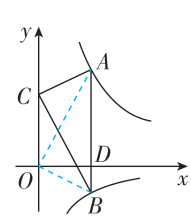


在平行四边形 $OABC$ 中，$AB=CO$，$AB/\!/CO$，∴ $\angle ABE=\angle COD$，∴ $\triangle ABE\cong\triangle COD$(AAS)，∴ $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}\times10=5$. 同理可得，$S_{\triangle AOE}=S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}\times6=3$，∴ 平行四边形 $OABC$ 的面积为 $2\times(3+5)=16$，故选 B.

5. D 【解析】如图，连接 BO. ∵ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{12}{x}(x>0)$的图象上，∴ $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times12=6$. ∵ 点 B 在反比例函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$的图象上，∴ $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times4=2$，∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOC}=6-2=4$. ∵ D 是 OA 的中点，∴ $S_{阴影}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times4=2$. 故选 D.



6. -2 【解析】如图，连接 OA，OB，设 AB 与 x 轴的交点为 D. 由题意得 $AB/\!/y$ 轴，∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle BOD}$，∴ $\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{2}|k|=3$，解得 $k=\pm2$. 由图象可知 $k=-2$，故答案为-2.



考点 14　反比例函数的实际应用

刷提升

1. $R\geqslant3.6$　【解析】由题意,设 $I=\frac{k}{R}(R>0)$. 把(9,4)代入,得 $k=36$,∴ $I=\frac{36}{R}(R>0)$. 当 $I=10$ 时,$R=3.6$. ∵ I 随着 R 的增大而减小,∴ 以此蓄电池为电源的用电器的限制电流 I 不能超过 10 A 时,用电器可变电阻 R 应控制的范围是 $R\geqslant3.6$. 故答案为 $R\geqslant3.6$.

2. 0.3　【解析】由题设平均行驶速度 v(km/h)与行驶时间 t(h)的关系式为 $v=\frac{k}{t}$. 将(0.4,90)代入,得 $90=\frac{k}{0.4}$,解得 $k=36$,∴ 平均行驶速度 v(km/h)与行驶时间 t(h)的关系式为 $v=\frac{36}{t}$. 把 $v=120$ 代入,得 $120=\frac{36}{t}$,解得 $t=0.3$,经检验,$t=0.3$ 是原方程的解,故一辆小型载客汽车以最大时速匀速通过该路段,时间 $t=0.3$,故答案为 0.3.

3. B　【解析】由题图可得,完全掌握知识后不复习,在 1.25 天时还能保持 50%的掌握度,故①说法正确;由题图可得,能拥有 50%及以上掌握度的时间小于 1.25 天,故②说法错误;完全掌握知识后不复习,在 2 天后会丢失 $\frac{100-30}{100}\times100\%=70\%$ 的掌握度,故③说法错误;当天数大于 0 小于等于 1.25 时,知识掌握度与天数不成反比例关系,故④说法错误. 综上,说法正确的个数为 1,故选 B.

4.【解】(1)根据石板搭建的小路面积一定,可得 xy 为定值,∴ y 是 x 的反比例函数. 设 $y=\frac{k}{x}$. 把 $x=20$,$y=3$ 代入上式,得 $3=\frac{k}{20}$,解得 $k=60$,∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{60}{x}$.

(2)不合理. 理由:当 $y=4$ 时,$4=\frac{60}{x}$,解得 $x=15$.

经检验 $x=15$ 是原分式方程的解.

∵ $15<18$,∴ 按照小路宽度为 4 米搭建小路,这种设计不合理.

专题 5　反比例函数与一次函数的综合

刷难关

1.【解】(1)将 $A(-1,6)$ 代入 $y_1=-x+b$,得 $6=1+b$,解得 $b=5$. 将 $A(-1,6)$ 代入 $y_2=\frac{k}{x}(x<0)$,得 $6=\frac{k}{-1}$,解得 $k=-6$,∴ k 和 b 的值分别为 -6,5.

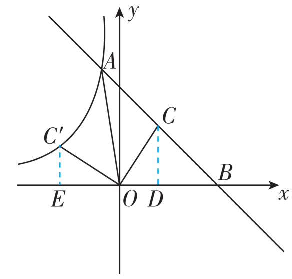
(2)点 C' 落在函数 $y_2=-\frac{6}{x}(x<0)$ 的图象上. 理由如下:

∵ $y_1=-x+5$,∴ 当 $y=0$ 时,$-x+5=0$,解得 $x=5$,∴ $B(5,0)$.

∵ $\triangle OCB$ 与 $\triangle OAB$ 的面积比为 1:2,∴ C 为 AB 的中点.

∵ $A(-1,6)$,$B(5,0)$,∴ $C(2,3)$.

如图,将 OC 绕点 O 逆时针旋转 90°,得到 OC',过点 C 作 $CD\perp x$ 轴,垂足为 D,过点 C' 作 $C'E\perp x$ 轴,垂足为 E.



由旋转的性质得 $OC'=OC$,$\angle COC'=90°$,

∴ $\angle C'OE=\angle OCD=90°-\angle COD$.

在 $\triangle C'OE$ 与 $\triangle OCD$ 中,$\begin{cases}\angle C'OE=\angle OCD,\\ \angle C'EO=\angle ODC=90°,\\ OC'=OC,\end{cases}$

∴ $\triangle C'OE\cong\triangle OCD$(AAS),∴ $OE=CD=3$,$C'E=OD=2$.

∵ C' 在第二象限,∴ $C'(-3,2)$.

当 $x=-3$ 时,$y_2=-\frac{6}{-3}=2$,∴ 点 C' 落在函数 $y_2=-\frac{6}{x}(x<0)$ 的图象上.

2.【解】(1)∵ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上,∴ 当 $x=2$ 时,$y=\frac{6}{2}=3$,∴ $A(2,3)$.

将点 $A(2,3)$ 代入 $y=kx+1$,得 $k=1$.

(2) $x<-3$ 或 $0<x<2$.

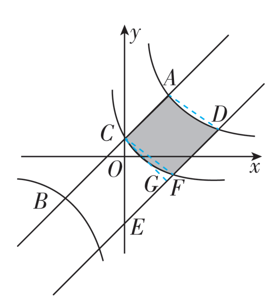
由(1)可知一次函数解析式为 $y=x+1$,

联立得 $\begin{cases}y=\frac{6}{x},\\ y=x+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3,\\ y=-2,\end{cases}$

∴ $B(-3,-2)$,根据图象,可得 $kx+1<\frac{6}{x}$ 时 x 的取值范围为 $x<-3$ 或 $0<x<2$.

(3)由题意可知 $C(0,1)$,$CE=4$.

如图,过点 C 作 $CG\perp DE$,垂足为 G,连接 CF,AD,易知四边形 $ACFD$ 是平行四边形.



∵ $CE=4$,∴ 易得 $CG=2\sqrt{2}$.

又∵ $A(2,3)$,$C(0,1)$,

∴ $AC=2\sqrt{2}$.

由平移的性质可知,阴影部分的面积就是平行四边形 $ACFD$ 的面积,即 $CG\cdot AC=2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8$.

专题6 一次函数、反比例函数与几何综合

刷难关

1.【解】(1)由新定义知,l_2 的解析式为 $y=2x-1$. 把点 $C(a,0)$ 代入 $y=2x-1$,得 $2a-1=0$,解得 $a=\frac{1}{2}$,故答案为 $y=2x-1,\frac{1}{2}$.

(2)①联立$\begin{cases}y=x-2,\\y=2x-1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=-1,\\y=-3.\end{cases}$

∴ 点 D 的坐标为$(-1,-3)$.

②令 $y=x-2=0$,得 $x=2$,∴ $A(2,0)$.

∵ $C\left(\frac{1}{2},0\right)$,∴ $AC=\frac{3}{2}$,∴ $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\times|y_D|=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3=\frac{9}{4}$.

2.【解】(1)∵ 直线 l_2 与直线 l_1 交于点 $D\left(\frac{10}{3},m\right)$,∴ 将点 D 的坐标代入 $y=-x+3$,得 $m=-\frac{10}{3}+3=-\frac{1}{3}$,∴ 点 $D\left(\frac{10}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

设直线 l_2 的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

将点 C,点 D 的坐标分别代入 $y=kx+b$,得$\begin{cases}-2=b,\\-\frac{1}{3}=\frac{10}{3}k+b,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=-2,\end{cases}$ ∴ 直线 l_2 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-2$.

(2)∵ 直线 $l_1:y=-x+3$ 与坐标轴交于 A,B 两点,

当 $y=0$ 时,$0=-x+3$,解得 $x=3$,

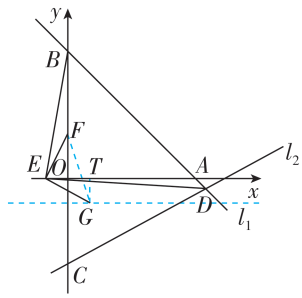
当 $x=0$ 时,$y=3$,∴ $A(3,0)$,$B(0,3)$.

设 $E(a,0)$. ∵ $\triangle BDE$ 的面积为 $\frac{20}{3}$,

∴ $\frac{1}{2}AE\cdot(y_B-y_D)=\frac{1}{2}(3-a)\cdot\left(3+\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{3}$,解得 $a=-1$,

∴ 点 E 的坐标为$(-1,0)$.

(3)①如图,连接 FG,过点 G 作 $GT\perp x$ 轴于点 T.



∵ 将线段 EF 绕点 E 顺时针旋转 $90°$,得到线段 EG,

∴ $\angle FEG=90°$,$EF=EG$,∴ $\angle FEO+\angle TEG=90°$.

∵ $\angle TEG+\angle EGT=90°$,∴ $\angle FEO=\angle EGT$.

∵ $\angle FOE=\angle ETG=90°$,$EF=EG$,

∴ $\triangle FOE\cong\triangle ETG(AAS)$,

∴ $OF=ET=n$,$OE=TG=1$,∴ 点 $G(n-1,-1)$,

∴ 点 G 的纵坐标为-1.

②点 F 的纵坐标 n 的取值范围为 $1<n<3$.

由点 $G(n-1,-1)$知,点 G 在直线 $y=-1$ 上运动.

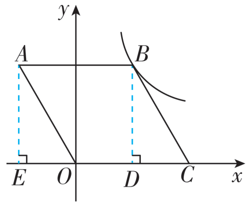
当点 G 在线段 BC 上时,$n-1=0$,解得 $n=1$.

当点 G 在线段 CD 上时,$-1=\frac{1}{2}(n-1)-2$,解得 $n=3$.

∵ 点 G 在$\triangle BCD$ 内部(不含边界),

∴ n 的取值范围为 $1<n<3$.

3.【解】(1)如图,过点 B 作 $BD\perp x$ 轴于点 D. ∵ 菱形 $OABC$ 的边长是 6,$\angle AOC=120°$,∴ $OA=OC=BC=BA=6$,$\angle OCB=60°$,∴ $BD=BC\cdot\sin\angle OCB=6\times\sin60°=3\sqrt{3}$,$CD=BC\cdot\cos\angle OCB=6\times\cos60°=3$,∴ $OD=OC-CD=3$,∴ $B(3,3\sqrt{3})$. ∵ 点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上,∴ $k=3\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$,∴ 反比例函数的解析式为 $y=\frac{9\sqrt{3}}{x}$.



(2)如图,过点 A 作 $AE\perp x$ 轴于点 E. ∵ 菱形 $OABC$ 的边长是 6,$\angle AOC=120°$,∴ $OA=OC=BC=BA=6$,$\angle AOE=60°$,∴ $C(6,0)$,$AE=OA\cdot\sin\angle AOE=6\times\sin60°=3\sqrt{3}$,$OE=OA\cdot\cos\angle AOE=6\times\cos60°=3$,∴ $A(-3,3\sqrt{3})$. ∵ 菱形 $OABC$ 向右平移 m 个单位长度,得到菱形 $O'A'B'C'$,∴ $O'(m,0)$,$C'(m+6,0)$,$A'(-3+m,3\sqrt{3})$,$B'(3+m,3\sqrt{3})$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象与 x 轴无交点,∴ 其图象不经过 $O'C'$的中点.

当反比例函数 $y=\frac{9\sqrt{3}}{x}(x>0)$ 的图象经过 $A'B'$的中点时,此时中点坐标为$(m,3\sqrt{3})$,∴ $m=\frac{9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=3$;

当反比例函数 $y=\frac{9\sqrt{3}}{x}(x>0)$ 的图象经过 $C'B'$的中点时,此时中点坐标为$\left(\frac{9}{2}+m,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,∴ $\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{\frac{9}{2}+m}$,∴ $m=\frac{3}{2}$;

当反比例函数 $y=\frac{9\sqrt{3}}{x}(x>0)$ 的图象经过 $A'O'$的中点时,此时

中点坐标为 $\left(-\frac{3}{2}+m,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{-\frac{3}{2}+m}$，$\therefore m=\frac{15}{2}$.

综上所述，$m=\frac{3}{2}$ 或 $m=3$ 或 $m=\frac{15}{2}$.

考点 15 二次函数

刷基础

1. B 【解析】抛物线 $y=-(x+2)^2+1$ 的顶点坐标为 $(-2,1)$，故选 B.

2. A 【解析】抛物线 $y=x^2$ 的对称轴为 y 轴，开口向上，$\therefore$ 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大. $\because$ 点 $(0,y_1)$，$(1,y_2)$，$(2,y_3)$ 都在二次函数 $y=x^2$ 的图象上，且 $0<1<2$，$\therefore y_3>y_2>y_1$，故选 A.

3. C 【解析】根据题意得 $y=-(x-a)(x-a-3)=-x^2+(2a+3)x-a^2-3a=-\left(x-\frac{2a+3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$. $\because -1<0$，$\therefore$ 当 $x=\frac{2a+3}{2}$ 时，该二次函数有最大值，最大值为 $\frac{9}{4}$，故选 C.

4. C 【解析】$\because (x-2)^2\geqslant 0$，$\therefore -(x-2)^2\leqslant 0$，$\therefore y_2=-(x-2)^2-1\leqslant -1<0$，$\therefore$ 无论 x 取何值，y_2 总是负数，故①正确. $\because$ 抛物线 $l_1:y_1=a(x+1)^2+2$ 与 $l_2:y_2=-(x-2)^2-1$ 交于点 $A(1,-2)$，$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y_1=-2$，即 $-2=a(1+1)^2+2$，解得 $a=-1$，$\therefore y_1=-(x+1)^2+2$，$\therefore l_2$ 可由 l_1 先向右平移 3 个单位，再向下平移 3 个单位得到，故②正确. $\because y_1-y_2=-(x+1)^2+2-[-(x-2)^2-1]=-6x+6$，$\therefore$ 当 $-3<x<1$ 时，随着 x 的增大，y_1-y_2 的值减小，故③错误. 故选 C.

5. A 【解析】$y=x^2+2x=(x+1)^2-1$. 将抛物线 $y=(x+1)^2-1$ 向下平移 2 个单位后，所得新抛物线的顶点式为 $y=(x+1)^2-3$，故选 A.

6. D 【解析】由题意得 $\begin{cases}4a-2b+c=-8,\\c=0,\\9a+3b+c=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\\c=0,\end{cases}$ $\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$. $\because a=-1<0$，$\therefore$ 图象的开口向下，故选项 A 不符合题意；图象的对称轴是直线 $x=1$，故选项 D 符合题意；当 $0<x<1$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大，当 $x>1$ 时，y 的值随 x 值的增大而减小，故选项 B 不符合题意；$\because$ 顶点坐标为 $(1,1)$，且图象经过原点，图象的开口向下，$\therefore$ 图象经过第一、三、四象限，故选项 C 不符合题意. 故选 D.

> **易错警示**
>
> 不要混淆 $(0,c)$ 和 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
>
> 注意在本题中二次函数的图象只是过点 $(0,0)$，而不是顶点是点 $(0,0)$，不要因此求错解析式.

7. A 【解析】抛物线 $y=-(x+1)^2$ 向右平移 1 个单位长度，得到抛物线 $y=-(x+1-1)^2=-x^2$，当 $x=0$ 时，$y=0$，所以经过坐标原点，故①是正确的；抛物线 $y=-(x+1)^2$ 先向右平移 3 个单位长度，再向上平移 4 个单位长度，得到抛物线 $y=-(x+1-3)^2+4=-(x-2)^2+4$，当 $x=0$ 时，$y=0$，所以经过坐标原点，故②是正确的；抛物线 $y=-(x+1)^2$ 向上平移 1 个单位长度，得到抛物线 $y=-(x+1)^2+1$，当 $x=0$ 时，$y=0$，所以经过坐标原点，故③是正确的；抛物线 $y=-(x+1)^2$ 先沿 x 轴翻折，再向下平移 1 个单位长度，得到抛物线 $y=(x+1)^2-1$，当 $x=0$ 时，$y=0$，所以经过坐标原点，故④是正确的. 综上，4 种方法都是正确的. 故选 A.

> **方法技巧**
>
> 二次函数图象平移规律
>
> *左加右减自变量，上加下减常数项.*

8. $y=3x^2$ 【解析】由题意设该二次函数的解析式为 $y=ax^2$. 将 $(-1,3)$ 代入 $y=ax^2$，得 $3=a$，$\therefore$ 该二次函数的解析式为 $y=3x^2$，故答案为 $y=3x^2$.

9. $y=-2(x+1)^2+6$ 【解析】$\because$ 要求的抛物线的顶点坐标为 $(-1,6)$，$\therefore$ 抛物线的解析式可设为 $y=a(x+1)^2+6$. $\because$ 抛物线 $y=a(x+1)^2+6$ 的形状、开口方向均与抛物线 $y=-2x^2+9x$ 相同，$\therefore a=-2$，$\therefore$ 要求的抛物线的解析式为 $y=-2(x+1)^2+6$. 故答案为 $y=-2(x+1)^2+6$.

10. $y=3(x-2)^2+1$ 【解析】$\because$ 抛物线 C_1 的解析式为 $y=-3(x+2)^2-1$，$\therefore$ 抛物线 C_1 的开口向下，顶点坐标为 $(-2,-1)$. $\because$ 抛物线 C_1 与抛物线 C_2 关于原点中心对称，$\therefore$ 抛物线 C_2 的开口向上，顶点坐标为 $(2,1)$，$\therefore$ 抛物线 C_2 的解析式为 $y=3(x-2)^2+1$. 故答案为 $y=3(x-2)^2+1$.

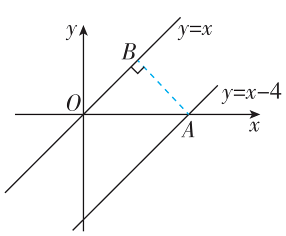
11. $-\frac{3}{5}$ 【解析】把 $A(0,m)$，$B(1,-m)$，$D(3,-m)$ 代入 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，得 $\begin{cases}c=m,\\a+b+c=-m,\\9a+3b+c=-m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{2}{3}m,\\b=-\frac{8}{3}m,\\c=m,\end{cases}$ $\therefore y=\frac{2}{3}mx^2-\frac{8}{3}mx+m$. 把 $C(2,n)$ 代入 $y=\frac{2}{3}mx^2-\frac{8}{3}mx+m$，得 $n=\frac{2}{3}m\times 2^2-\frac{8}{3}m\times 2+m$，$\therefore n=-\frac{5}{3}m$，$\therefore \frac{m}{n}=\frac{m}{-\frac{5}{3}m}=-\frac{3}{5}$，故答案为 $-\frac{3}{5}$.

12. A 【解析】由抛物线 $y=x^2+2x-4$ 与 x 轴交于点 $A(a,0)$ 和 $B(b,0)$，得 $a+b=-2$，$ab=-4$，$\therefore (a+1)(b+1)=ab+a+b+1=-4-2+1=-5$，故选 A.

13. D 【解析】由题意可得，方程 $ax^2-2ax+a-3=0(a\neq0)$ 的两根异号，$\therefore x_1x_2=\dfrac{a-3}{a}<0$，解得 $0<a<3$，$\therefore$ 二次项系数 $a>0$，$\therefore$ 图象开口向上，故 A 不符合题意；$\because$ 抛物线 $y=ax^2-2ax+a-3(a\neq0)$ 的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-2a}{2a}=1$，$\therefore$ 当 $x>1$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大，故 B 不符合题意；$\because$ 当 $x=1$ 时，$y=a-2a+a-3=-3$，$\therefore$ 函数的最小值为 -3，故 C 不符合题意；当 $x=2$ 时，$y=4a-4a+a-3=a-3$. $\because 0<a<3$，$\therefore a-3<0$，即当 $x=2$ 时，$y<0$，故 D 符合题意. 故选 D.

14. $m\leqslant\dfrac{1}{8}$ 【解析】$\because$ 二次函数 $y=2x^2-x+m$ 的图象与 x 轴有交点，$\therefore(-1)^2-4\times2\times m\geqslant0$，$\therefore m\leqslant\dfrac{1}{8}$，即 m 的取值范围为 $m\leqslant\dfrac{1}{8}$. 故答案为 $m\leqslant\dfrac{1}{8}$.

15. ①④ 【解析】当 $m=0$ 时，$y=x^2-4$，此抛物线的对称轴是 y 轴，故①正确. $\because$ 此抛物线与 x 轴只有一个公共点，$\therefore x^2-2mx+m^2+m-4=0$ 有两个相等的实数根，$\therefore(-2m)^2-4(m^2+m-4)=0$，解得 $m=4$，故②错误. $\because y=x^2-2mx+m^2+m-4=(x-m)^2+m-4$，$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=m$. $\because 1>0$，$\therefore$ 抛物线开口向上，$\therefore$ 离对称轴越远的点的纵坐标越大. $\because$ 点 $A(m-2,y_1)$，$B(m+1,y_2)$ 在抛物线上，且 $|m-2-m|>|m+1-m|$，$\therefore y_1>y_2$，故③错误. $\because y=x^2-2mx+m^2+m-4=(x-m)^2+m-4$，$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(m,m-4)$，$\therefore$ 抛物线的顶点在直线 $y=x-4$ 上. 如图，设直线 $y=x-4$ 与 x 轴交于点 A，过点 A 作 AB 垂直直线 $y=x$ 于点 B，则点 $A(4,0)$，$\angle AOB=45°$，$\therefore OA=4$，$\triangle OAB$ 是等腰直角三角形，$\therefore AB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OA=2\sqrt{2}$，$\therefore$ 无论 m 为何值，抛物线的顶点到直线 $y=x$ 的距离都等于 $2\sqrt{2}$，故④正确. 故答案为①④.



16.【解】(1) $\because$ 抛物线过点 $(1,2)$，$(3,2)$，$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$，$\therefore$ 当 $x=4$ 和 $x=0$ 时，函数值相等. $\because$ 当 $x=4$ 时，$y=5$，$\therefore m=5$. 故答案为 5.

(2) 由题意得抛物线的顶点坐标为 $(2,1)$，$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2+1$. 把 $(0,5)$ 代入得 $5=4a+1$，解得 $a=1$，$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=(x-2)^2+1=x^2-4x+5$.

(3) $\because$ 抛物线 $y=x^2-4x+5$ 和直线 $y=x-1$ 的交点坐标为 $(2,1)$，$(3,2)$，$\therefore$ 当 $x<2$ 或 $x>3$ 时，$x^2-4x+5>x-1$，即关于 x 的不等式 $x^2-4x+5>x-1$ 的解集为 $x<2$ 或 $x>3$. 故答案为 $x<2$ 或 $x>3$.

17.【解】(1) 当 $a=1$ 时，$y=x^2-2x$. 令 $y=0$，得 $x^2-2x=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=2$，$\therefore$ 抛物线与 x 轴交点的坐标为 $(0,0)$ 和 $(2,0)$.

(2) $\because 2\leqslant m\leqslant4$，$\therefore 3\leqslant m+1\leqslant5$，$-5\leqslant3-2m\leqslant-1$，$\therefore 3-2m<m+1$，即 $x_1<x_2$. $\because y_1>y_2$，$\therefore y_1-y_2=(ax_1^2-2a^2x_1)-(ax_2^2-2a^2x_2)=a(x_1-x_2)(x_1+x_2-2a)>0$.

①当 $a>0$ 时，$\because x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$，$\therefore x_1+x_2-2a<0$，即 $4-m-2a<0$，$\therefore 4-m<2a$. $\because 2\leqslant m\leqslant4$，$\therefore 4-2<2a$，$\therefore a>1$.

②当 $a<0$ 时，$\because x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$，$\therefore x_1+x_2-2a>0$，即 $4-m-2a>0$，$\therefore 4-m>2a$. $\because 2\leqslant m\leqslant4$，$\therefore 4-4>2a$，$\therefore a<0$.

综上所述，$a>1$ 或 $a<0$.

刷提升

1. C 【解析】$\because$ 抛物线开口向上，$\therefore a>0$. $\because$ 抛物线对称轴在 y 轴右侧，$\therefore -\dfrac{b}{2a}>0$，$\therefore b<0$. $\because$ 抛物线与 y 轴交于负半轴，$\therefore c<0$，$\therefore abc>0$，故 A 选项错误. 由题图易知 $-\dfrac{b}{2a}<1$，$\therefore -b<2a$，$\therefore 2a+b>0$，故 B 选项错误. $\because$ 抛物线过点 $(2,0)$，$\therefore 4a+2b+c=0$，$\therefore c=-4a-2b$，$\therefore 2b-c=2b+4a+2b=4(a+b)$. 由题图易知 $-\dfrac{b}{2a}>\dfrac{1}{2}$，$\therefore a+b<0$，$\therefore 2b-c<0$，故 C 选项正确. 由题图可知，当 $x=-1$ 时，$y>0$，$\therefore a-b+c>0$，故 D 选项错误. 故选 C.

> **方法技巧**
>
> **二次函数图象与系数的关系**
>
> a 决定开口方向，$a>0$ 时，图象开口向上，$a<0$ 时，图象开口向下. a，b 共同决定对称轴的位置. a 与 b 符号相同时，对称轴在 y 轴左侧；a 与 b 符号相反时，对称轴在 y 轴右侧，简单记为左同右异. c 决定抛物线与 y 轴的交点情况：$c>0$ 时，图象交 y 轴于正半轴；$c=0$ 时，图象经过原点；$c<0$ 时，图象交 y 轴于负半轴.

2. C 【解析】把抛物线 $y=2x^2-1$ 先向左平移 2 个单位，再向上平移 2 个单位后所得抛物线的解析式为 $y=2(x+2)^2-1+2$，即 $y=2(x+2)^2+1$. 故选 C.

3. C 【解析】由图象可知，该抛物线开口向下，与 y 轴交于正半轴，$\therefore a<0$，$c>0$. $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}=-1$，$\therefore b=2a<0$，$\therefore abc>0$，故结论①正确. $\because$ 该抛物线过点 $(-4,0)$，对称轴为直线 $x=-1$，$\therefore$ 该抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(2,0)$，$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$4a+2b+c=4a+2\times2a+c=8a+c=0$，$\therefore c=-8a$，$\therefore 4a+c=-4a>0$，故结论②错误. $\because A(x_1,m)$，$B(x_2,m)$ 是抛物线上的两点，$\therefore$ 由抛物线的对称性可知 $x_1+x_2=-1\times2=-2$，$\therefore$ 当 $x=x_1+x_2$ 时，$y=4a-2b+c=4a-2\times2a+c=c$，故结论③正确. $\because$ 该抛物线与 x 轴交于点 $(-4,0)$，$(2,0)$，$\therefore y=ax^2+bx+c=a(x+4)(x-2)$. $\because$ 方程 $a(x+4)(x-2)=-2$ 的两个根为 x_1，

x_2，∴ x_1，x_2 为抛物线与直线 $y=-2$ 的两个交点的横坐标. ∵ $x_1<x_2$，∴ $x_1<-4<2<x_2$，故结论④正确. 综上所述，结论正确的是①③④，共 3 个，故选 C.

4. $-6<x<-3$　【解析】抛物线 $y_2=bx^2+6bx$ 的顶点坐标为 $(-3,-9b)$. 将 $(-3,-9b)$ 代入 $y_1=ax+6a$ 并整理得 $a=-3b$，∴ $y_1-y_2=ax+6a-(bx^2+6bx)=-3bx-18b-bx^2-6bx=-9bx-18b-bx^2=-b(x+3)(x+6)$. ∵ 当 $x>0$ 时，$y_1<y_2$，∴ $b>0$. 令 $y_1-y_2=-b(x+3)(x+6)=0$，得 $x=-3$ 或 $x=-6$. ∵ $-b<0$，∴ 当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围是 $-6<x<-3$，故答案为 $-6<x<-3$.

5. ①③④　【解析】①当 $m=1$ 时，$y=x^2-1$，则函数图象的对称轴为 y 轴，故①正确. ②由题意可得抛物线开口向上，∵ $x>-1$ 时，y 随 x 的增大而增大，∴ $-\frac{m-1}{2}\leqslant-1$，∴ $m\geqslant3$，故②错误. ③$y=x^2+(m-1)x+m-2=x^2+(x+1)m-x-2$，令 $x+1=0$，得 $x=-1$，此时 $y=0$，∴ 无论 m 为何值，该函数的图象必经过一个定点 $(-1,0)$，故③正确. ④$y=x^2+(m-1)x+m-2=\left(x+\frac{m-1}{2}\right)^2-\frac{(m-1)^2}{4}+m-2=\left(x+\frac{m-1}{2}\right)^2-\frac{(m-3)^2}{4}$，∴ 抛物线的顶点坐标为 $\left(-\frac{m-1}{2},-\frac{(m-3)^2}{4}\right)$. ∵ $-\frac{(m-3)^2}{4}\leqslant0$，∴ 抛物线的顶点一定不在 x 轴的上方，故④正确. 综上所述，正确的结论是①③④，故答案为①③④.

6.【解】(1) ∵ 抛物线 $y=-x^2+bx$ 的顶点横坐标为 $\frac{b}{2}$，抛物线 $y=-x^2+2x$ 的顶点横坐标为 1，抛物线 $y=-x^2+bx$ 的顶点横坐标比抛物线 $y=-x^2+2x$ 的顶点横坐标大 1，∴ $\frac{b}{2}-1=1$，∴ $b=4$.

(2)(i) ∵ 点 $A(x_1,y_1)$ 在抛物线 $y=-x^2+2x$ 上，∴ $y_1=-x_1^2+2x_1$. ∵ $B(x_1+t,y_1+h)$ 在抛物线 $y=-x^2+4x$ 上，∴ $y_1+h=-(x_1+t)^2+4(x_1+t)$，∴ $-x_1^2+2x_1+h=-(x_1+t)^2+4(x_1+t)$，

∴ $h=-t^2-2x_1t+2x_1+4t$.

∵ $h=3t$，∴ $3t=-t^2-2x_1t+2x_1+4t$，∴ $t(t+2x_1)=t+2x_1$.

∵ $x_1\geqslant0$，$t>0$，∴ $t+2x_1>0$，∴ $t=1$，∴ $h=3$.

(ii) 将 $x_1=t-1$ 代入 $h=-t^2-2x_1t+2x_1+4t$，

化简得 $h=-3t^2+8t-2=-3\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$.

∵ $-3<0$，∴ 当 $t=\frac{4}{3}$，即 $x_1=\frac{1}{3}$ 时，h 取最大值，最大值为 $\frac{10}{3}$.

7.【解】(1) 将点 $A(2,0)$ 代入 $y=x^2+mx$，得 $4+2m=0$，解得 $m=-2$.

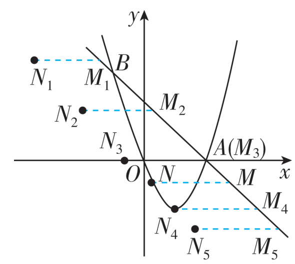
将点 $A(2,0)$ 代入 $y=-x+b$，得 $-2+b=0$，解得 $b=2$.

(2) 由(1)可知，抛物线的解析式为 $y=x^2-2x$，直线的解析式为 $y=-x+2$. 联立 $\begin{cases}y=x^2-2x,\\y=-x+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$

∴ 点 B 的坐标为 $(-1,3)$，∴ 结合函数图象可知，不等式 $x^2+mx>-x+b$ 的解集为 $x<-1$ 或 $x>2$.

(3) $2\leqslant x_M<3$. 由题意得 $MN=3$，∵ $A(2,0)$，$B(-1,3)$，∴ $OA=2$，点 A，B 之间的水平距离为 3. 将抛物线 $y=x^2-2x$ 化为顶点式为 $y=(x-1)^2-1$，∴ 其顶点坐标为 $(1,-1)$.

如图，



当点 N_4 与抛物线的顶点 $(1,-1)$ 重合时，$-x_M+2=-1$，解得 $x_M=3$，此时线段 MN 与抛物线只有一个公共点. 由图可知，当 $x_M<-1$ 时，线段 MN 与抛物线没有公共点；当 $-1\leqslant x_M<2$ 时，线段 MN 与抛物线只有一个公共点；当 $2\leqslant x_M<3$ 时，线段 MN 与抛物线有两个公共点；当 $x_M=3$ 时，线段 MN 与抛物线只有一个公共点；当 $x_M>3$ 时，线段 MN 与抛物线没有公共点. 综上，若线段 MN 与抛物线有两个公共点，则点 M 的横坐标 x_M 的取值范围为 $2\leqslant x_M<3$.

8. (1)【解】∵ 二次函数 $y=-x^2+c$ 的图象经过点 $A(-2,5)$，

∴ $5=-4+c$，∴ $c=9$，

∴ 二次函数的解析式为 $y=-x^2+9$.

(2)【证明】当 $y=0$ 时，$0=-x^2+9$，

解得 $x_1=-3$，$x_2=3$.

∵ 点 B 在 x 轴的正半轴上，∴ $B(3,0)$.

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，

∴ $\begin{cases}-2k+b=5,\\3k+b=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}k=-1,\\b=3,\end{cases}$

∴ 直线 AB 的解析式为 $y=-x+3$.

由题意可得 $P(x_1,-x_1^2+9)$，$Q(x_1+3,-(x_1+3)^2+9)$，$D(x_1,-x_1+3)$，∴ $PD=-x_1^2+9-(-x_1+3)=-x_1^2+x_1+6=(x_1+2)(-x_1+3)$，$CD=-x_1+3$，∴ $\frac{S_{\triangle PDQ}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{(x_1+2)(-x_1+3)(x_1+3-x_1)}{(-x_1+3)(x_1+2)}=3$，

∴ $\frac{S_{\triangle PDQ}}{S_{\triangle ADC}}$ 的值为定值.

(3)【解】由题意可得 $P(x_1,-x_1^2+9)$，$Q(-2x_1,-4x_1^2+9)$.

设直线 PQ 的解析式为 $y=mx+n$，

∴ $\begin{cases}mx_1+n=-x_1^2+9,\\-2mx_1+n=-4x_1^2+9,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}m=x_1,\\n=-2x_1^2+9,\end{cases}$

∴ 直线 PQ 的解析式为 $y=x_1x-2x_1^2+9$.

当 $x=x_1-1$ 时，

$y=x_1(x_1-1)-2x_1^2+9=-\left(x_1+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{37}{4}$,

$\therefore$ 当 $x_1=-\dfrac{1}{2}$时,线段 MN 的长度有最大值,最大值为$\dfrac{37}{4}$.

刷 素养

9.【解】(1)$\because$ 二次函数 $y=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+m$ 和 $y=-\dfrac{1}{2}(x-n)^2+\dfrac{1}{2}$的图象都是抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的伴随抛物线,$\therefore$ $\dfrac{1}{2}\times2^2=m$,$\dfrac{1}{2}\times n^2=\dfrac{1}{2}$,$\therefore$ $m=2,n=\pm1$,故答案为 2,±1.

(2)①$\because$ $y=x^2-2kx+4k+5=(x-k)^2-k^2+4k+5$,

$\therefore$ 抛物线 C_2 的顶点为$(k,-k^2+4k+5)$.

$\because$ C_2 始终是 C_0 的伴随抛物线,

$\therefore$ 可令 $k=0$,则抛物线 C_2 的顶点为(0,5);$k=1$,则抛物线 C_2 的顶点为(1,8),$\therefore$ $\begin{cases}e=5,\\-1+d+e=8,\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}d=4,\\e=5.\end{cases}$

②$x_1<-1$ 或 $2<x_1<5$.

由①得,函数 $y=-x^2+4x+5$ 的图象为抛物线 C_0,$\therefore$ 抛物线 C_0 的顶点为(2,9).

$\because$ C_2 始终是 C_0 的伴随抛物线,$\therefore$ 抛物线 C_2 的顶点$(k,-k^2+4k+5)$在抛物线 C_0 上滑动,顶点为(2,9).

当$-x^2+4x+5=0$ 时,解得 $x=-1$ 或 $x=5$,

$\therefore$ 抛物线 C_0 与 x 轴交于点(-1,0),(5,0).

当抛物线 C_2 的顶点在(-1,0)下方时,抛物线与 x 轴有两个交点,此时 $x_1<-1$.

$\because$ C_2 是 C_0 的伴随抛物线,$\therefore$ C_0 也是 C_2 的伴随抛物线,$\therefore$ C_0 的顶点(2,9)在 C_2 上,$\therefore$ 当抛物线 C_2 的顶点在(5,0)下方时,$2<x_1<5$.

综上所述,x_1 的取值范围为 $x_1<-1$ 或 $2<x_1<5$.

专题 7 函数图象的分析与判断

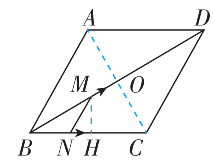
刷 难关

1. D 【解析】$\because$ 一次函数 $y=ax-b(a\neq0)$的图象经过第一、二、四象限,$\therefore$ $a<0,b<0$. $\because$ 反比例函数 $y=\dfrac{-c}{x}(c\neq0)$的图象分布在第二、四象限,$\therefore$ $c>0$,$\therefore$ $a<0,b<0,c>0$,$\therefore$ 函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象开口向下,对称轴在 y 轴左侧,与 y 轴的交点在正半轴,只有选项 D 符合. 故选 D.

2. A 【解析】$\because$ 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$的图象与二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$的图象在第二象限一定有交点,$\therefore$ $k<0,a>0$,$\therefore$ $k-2<0,a+1>0$,$\therefore$ 一次函数 $y=(k-2)x+a+1$ 的图象经过第一、二、四象限,故选 A.

3. C 【解析】A 选项,从题图中可以看出,当温度为 0 ℃时,$y\neq0$,说明当温度为 0 ℃时,硫酸钠在水中是溶解的,故该选项不符合题意. B 选项,观察题图,在 0 ℃~40 ℃时,硫酸钠的溶解度随着温度的升高而增大,在 40 ℃~80 ℃时,溶解度随着温度的升高而减小,并非一直增大,故该选项不符合题意. C 选项,当温度在 0 ℃~20 ℃时,溶解度曲线不是一条直线,这表明温度每升高 1 ℃,硫酸钠溶解度的增加量不相同,故该选项符合题意. D 选项,从题图可知,当温度接近 40 ℃时,硫酸钠的溶解度就达到了 43.7 g,并且在 40 ℃~80 ℃之间溶解度都不低于 43.7 g,所以要使硫酸钠的溶解度不低于 43.7 g,温度不是只控制在 40 ℃~80 ℃,故该选项不符合题意. 故选 C.

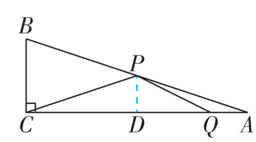
4. C 【解析】根据题意可知,$BN=x$ cm,$BM=\sqrt{3}x$ cm. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,$\angle ABC=60°$,$\therefore$ $\angle DBC=30°$. 过点 M 作 $MH\perp BC$ 于点 H,连接 AC 交 BD 于 O,如图,



则 $MH=BM\times\sin\angle MBH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ cm,$\therefore$ $y=S_{\triangle BMN}=\dfrac{1}{2}BN\cdot MH=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ cm². 设菱形 $ABCD$ 的边长为 a cm,$\therefore$ $BD=2BO=2BC\cdot\cos\angle OBC=2\times a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}a$(cm),$\therefore$ 点 M 到达点 D 的时间和点 N 到达点 C 的时间相同. 当点 M 到达点 D,点 N 到达点 C 时,$\triangle BMN$ 的面积达到最大值 $4\sqrt{3}$,$\therefore$ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2=4\sqrt{3}$,解得 $x=4$(负值已舍去),$\therefore$ $BC=4$ cm,故选 C.

5. (1)8 (2)12 【解析】(1)根据题意可得,当 $t=4$ 时,点 P 与点 B 重合. $\because$ 动点 P,Q 均以 1 cm/s 的速度从点 C 同时出发,$\therefore$ 此时 $CB=CP=CQ=4$ cm. $\because$ $\angle C=90°$,$\therefore$ $S=m=\dfrac{1}{2}CP\cdot CQ=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$,故答案为 8.

(2)由函数图象可知,当 $t=10$ 时,$S=10$,此时 $CQ=10$,$BP=10-BC=6$. 过点 P 作 $PD\perp AC$ 于点 D,如图,



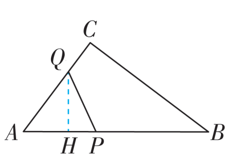
则$\angle PDA=90°$. $\because$ $S=\dfrac{1}{2}CQ\cdot PD=\dfrac{1}{2}\times10\cdot PD=5PD=10$,$\therefore$ $PD=2$. $\because$ $\angle PDA=\angle BCA=90°$,$\angle A=\angle A$,$\therefore$ $\triangle ADP\backsim\triangle ACB$,$\therefore$ $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{PD}{BC}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$,$\therefore$ $AP=\dfrac{1}{2}AB$,$\therefore$ P 为 AB 的中点,$\therefore$ $AB=2BP=12$,故答案为 12.

6. A 【解析】①由题图(2)可知,当 $x=3$ 时,快车到达锦绣中学,$\therefore$ 题图(1)中 $a=3$,故①正确;②$v_{快车}=\dfrac{300}{3}=100$(km/h),$v_{慢车}=\dfrac{300}{5}=60$(km/h),两车相遇时,$100x+60x=300$,解得 $x=\dfrac{15}{8}$,故②正确;③当 $x=\dfrac{3}{2}$时,快车行驶的路程为 $100\times\dfrac{3}{2}=$

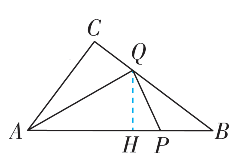
150(km),慢车行驶的路程为 $60\times\frac{3}{2}=90$(km),∴ 两车相距 $300-150-90=60$(km),故③正确;④当两车相遇之前,相距 200 km 时,$100x+200+60x=300$,解得 $x=\frac{5}{8}$;当两车相遇之后,相距 200 km 时,易知此时快车早已到达锦绣中学,∴ 当 $x=200\div60=\frac{10}{3}$ 时,两车相距 200 km. 故当 $x=\frac{5}{8}$ 或 $\frac{10}{3}$ 时,两车相距 200 km,故④错误. 综上可知①②③正确. 故选 A.

7. A 【解析】在 Rt $\triangle ABC$ 中,由勾股定理可得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$. 当点 Q 在线段 AC 上,即 $0\leqslant t\leqslant 6$ 时,如图(1),过点 Q 作 $QH\perp AB$ 于点 H. 由题意可知 $\sin A=\frac{QH}{AQ}=\frac{BC}{AB}$,即 $\frac{QH}{t}=\frac{8}{10}$,∴ $QH=\frac{4}{5}t$,∴ $S=\frac{1}{2}AP\cdot QH=\frac{1}{2}t\cdot\frac{4}{5}t=\frac{2}{5}t^2$. 当点 Q 在线段 BC 上,即 $6<t\leqslant 10$ 时,如图(2),过点 Q 作 $QH\perp AB$ 于点 H. 根据题意得,$AP=t$,$BQ=14-t$,∴ $\sin B=\frac{QH}{BQ}=\frac{AC}{AB}$,即 $\frac{QH}{14-t}=\frac{6}{10}$,∴ $QH=-\frac{3}{5}t+\frac{42}{5}$,∴ $S=\frac{1}{2}AP\cdot QH=\frac{1}{2}t\left(-\frac{3}{5}t+\frac{42}{5}\right)=-\frac{3}{10}t^2+\frac{21}{5}t$.

综上所述,$S=\begin{cases}\frac{2}{5}t^2(0\leqslant t\leqslant 6),\\-\frac{3}{10}t^2+\frac{21}{5}t(6<t\leqslant 10).\end{cases}$ 故选 A.

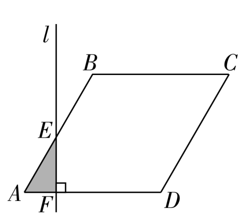


图(1)

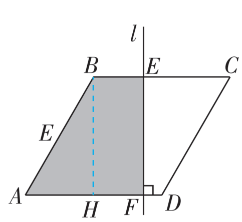


图(2)

8. A 【解析】当点 E 在 AB 上时,设 l 交边 AD 于点 F,如图(1). ∵ $\angle A=60°$,$l\perp AD$,∴ $\angle AEF=30°$,∴ $AF=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}x$,∴ $EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$,∴ $y=\frac{1}{2}AF\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{8}x^2$,∴ 此时图象为开口上的抛物线的一部分.



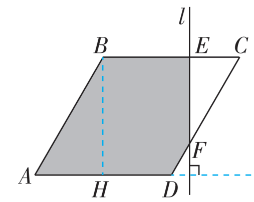
图(1)



图(2)

当点 E 在 BC 上且 l 与边 AD 相交时,设交点为 F,作 $BH\perp AD$ 于 H,如图(2),则 $BE=x-4$,易得四边形 $BHFE$ 为矩形. ∵ $\angle A=60°$,$BH\perp AD$,∴ $\angle ABH=30°$,∴ $AH=\frac{1}{2}AB=2$,∴ $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=2\sqrt{3}$,∴ $y=S_{\triangle ABH}+S_{矩形BEFH}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}+2\sqrt{3}(x-4)=2\sqrt{3}x-6\sqrt{3}$,∴ 此时图象为直线的一部分.

当点 E 在 BC 上且 l 与边 CD 相交时,设交点为 F,过点 B 作 $BH\perp AD$ 于 H,如图(3).



图(3)

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $\angle C=\angle A=60°$,$l\perp BC$,$CE=AB+BC-x=8-x$,∴ $EF=CE\cdot\tan 60°=\sqrt{3}(8-x)$,

∴ $S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}CE\cdot EF=\frac{1}{2}(8-x)\cdot\sqrt{3}(8-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(8-x)^2$,

∴ $y=S_{菱形ABCD}-S_{\triangle CEF}=AD\cdot BH-\frac{\sqrt{3}}{2}(8-x)^2=4\times2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}(8-x)^2=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+8\sqrt{3}x-24\sqrt{3}$,∴ 此时图象为开口向下的抛物线的一部分,故选 A.

重难专题 8　二次函数图象与系数的关系

刷 难关

1. C 【解析】A 选项,∵ 该函数图象与 y 轴负半轴相交,∴ $c<0$,故该选项错误,不符合题意. B 选项,∵ 该函数图象与 x 轴有两个交点,∴ $b^2-4ac>0$,故该选项错误,不符合题意. C 选项,∵ 该函数图象开口向上,对称轴为直线 $x=1$,∴ $a>0$,$-\frac{b}{2a}=1$,∴ $b=-2a$. ∵ 当 $x=-1$ 时,$y=a-b+c>0$,∴ $3a+c>0$,∴ $4a+c>a>0$,故该选项正确,符合题意. D 选项,∵ 该函数图象与 x 轴的一个交点的横坐标在-1 和 0 之间,其对称轴为直线 $x=1$,∴ 该函数图象与 x 轴的另一个交点的横坐标在 2 和 3 之间,∴ 当$-1<x<3$ 时,一部分 $y<0$,一部分 $y>0$,故该选项错误,不符合题意. 故选 C.

2. ①②④ 【解析】把$(-4,0)$,$(-1,9)$,$(1,5)$代入 $y=ax^2+bx+c$,得 $\begin{cases}16a-4b+c=0,\\a-b+c=9,\\a+b+c=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\\c=8,\end{cases}$ ∴ $abc>0$,故①正确.

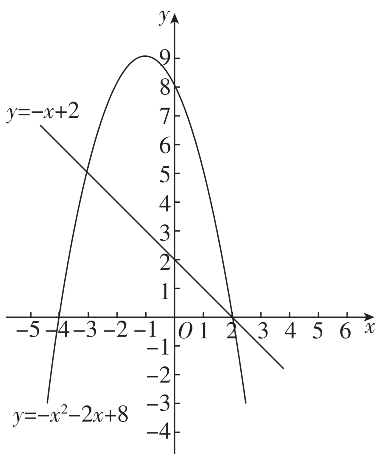
∵ $a=-1$,$b=-2$,$c=8$,∴ $y=-x^2-2x+8$,当 $y=9$ 时,$-x^2-2x+8=9$,∴ $x^2+2x+1=0$. ∵ $\Delta=2^2-4\times1\times1=0$,∴ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=9$ 有两个相等的实数根,故②正确.

∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{-3+1}{2}=-1$,∴ 抛物线的顶点坐标为$(-1,9)$. 又∵ $a<0$,∴ 当 $x<-1$ 时,y 随 x 的增大而增大,当 $x>-1$ 时,y 随 x 的增大而减小,当 $x=-1$ 时,函数取最大值

9，∴ 当$-4<x<1$时，y的取值范围为$0<y\leqslant 9$，故③错误.

$\because \dfrac{m+(-m-2)}{2}=-1$，∴ 点$(m,y_1)$，$(-m-2,y_2)$关于对称轴对称，∴ $y_1=y_2$，故④正确.

由$ax^2+(b+1)x+c<2$得$ax^2+bx+c<-x+2$，即$-x^2-2x+8<-x+2$，画出函数$y=-x^2-2x+8$和$y=-x+2$的图象如下：



由$\begin{cases}y=-x+2,\\y=-x^2-2x+8,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=0,\end{cases}\begin{cases}x_2=-3,\\y_2=5,\end{cases}$∴ 两函数图象的交点坐标为$(2,0)$，$(-3,5)$. 由图象可得，当$x<-3$或$x>2$时，$-x^2-2x+8<-x+2$，即$ax^2+(b+1)x+c<2$，故⑤错误. 综上，正确的结论为①②④，故答案为①②④.

3. B 【解析】由题图可知，二次函数图象开口向下，与y轴正半轴交于一点，∴ $a<0$，$c>0$. ∵ $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2}<0$，∴ $b<0$，∴ $abc>0$，故①错误. ∵ $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2}$，∴ $b=a$. 当$x=-\dfrac{3}{2}$时，$y=0$，∴ $\dfrac{9}{4}a-\dfrac{3}{2}b+c=0$，∴ $9a-6b+4c=0$，即$3a+4c=0$，故②正确. 当$x=m$时，$y=am^2+bm+c$，当$x=-\dfrac{1}{2}$时，函数取最大值，∴ 对于任意实数m有$am^2+bm+c\leqslant\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{2}b+c$，∴ $am^2+bm\leqslant\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{2}b$，故③正确. ∵ 抛物线的对称轴为直线$x=-\dfrac{1}{2}$，点$(-1,y_1)$和点$(2,y_2)$都在抛物线上，而$\left|-\dfrac{1}{2}-(-1)\right|=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}<\left|2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|=2\dfrac{1}{2}$，∴ $y_1>y_2$，故④错误. 综上，说法正确的为②③，共2个，故选B.

4. B 【解析】∵ 抛物线$y=ax^2+bx+c$（a,b,c是常数，$a<0$）的顶点为$(1,2)$，∴ $-\dfrac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a$. ∵ $a<0$，∴ $b>0$. ∵ $a+b+c=2$，∴ $c=2-a-b=2-a-(-2a)=2+a$，∴ c的正负无法判断，故①错误. ∵ $a<0$，∴ 抛物线开口向下. ∵ 对称轴为直线$x=1$，∴ 当$x>1$时，y随x的增大而减小，故②正确. ∵ $b=-2a$，$c=2+a$，∴ $y=ax^2-2ax+2+a$. 若$ax^2+bx+c=0$的一个根为3，则当$x=3$时，$y=0$，∴ $0=9a-6a+2+a$，∴ $a=-\dfrac{1}{2}$，故③正确. ∵ $y=ax^2+bx+c=a(x-1)^2+2$，∴ 将抛物线向左平移1个单位，再向下平移2个单位得到$y=a(x-1+1)^2+2-2=ax^2$，故④错误. 故选B.

5. A 【解析】设抛物线$y=-x^2+bx+c$与x轴交点的横坐标分别为x_1，x_2，且$x_1<1$，$x_2>1$. ∵ $a=-1<0$，∴ 抛物线开口向下，∴ 当$x=1$时，$y>0$，即$-1+b+c>0$，∴ $b+c>1$，故A选项正确，符合题意. 由$x_1<1$，$x_2>1$不能得出对称轴为直线$x=1$，故B选项错误，不符合题意. ∵ 抛物线与x轴有两个交点，∴ 方程$-x^2+bx+c=0$有两个不相等的实数根，即$\Delta=b^2-4ac>0$. 又∵ $a=-1$，∴ $b^2+4c>0$，故C选项错误，不符合题意. 无法判断c的符号，D选项错误，故选A.

6. ①③④ 【解析】∵ 一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有两实数根$x_1=-2$，$x_2=4$，∴ $\begin{cases}4a-2b+c=0,\\16a+4b+c=0,\end{cases}$ ∴ $12a+6b=0$，∴ $2a+b=0$，故①正确. 由$2a+b=0$，可得$b=-2a$，∴ 抛物线$y=ax^2+bx+c$的对称轴是直线$x=-\dfrac{b}{2a}=1$，∴ 抛物线的顶点坐标为$(1,a+b+c)$. 又∵ $b=-2a$，$4a-2b+c=0$，∴ $8a+c=0$，∴ $a=-\dfrac{c}{8}$，$b=\dfrac{c}{4}$，∴ $a+b+c=\dfrac{9c}{8}$，∴ 抛物线的顶点坐标为$\left(1,\dfrac{9c}{8}\right)$，故②不正确. ∵ $b=-2a$，$c=-8a$，$abc<0$，∴ $a<0$，故③正确. ∵ $a<0$，且抛物线$y=ax^2+bx+c$的对称轴是直线$x=-\dfrac{b}{2a}=1$，∴ 该抛物线开口向下，当$x<1$时，y随x的增大而增大. 又∵ $|0-1|=|2-1|=1$，∴ 当$x=0$时和当$x=2$时，函数值y相等，∴ 当$m<0$时，$am^2+bm+c<4a+2b+c$，即当$m<0$时，$m(am+b)<4a+2b$，故④正确. 综上，正确的有①③④，故答案为①③④.

考点16　二次函数的实际应用

刷 提升

1. C 【解析】①根据题意得，点M在AB上的运动时间为$\dfrac{8}{2}=4$(s)，点M在AD上的运动时间为$\dfrac{10}{2}=5$(s)，∴ 当$t=6$时，点M在AD上，此时$AM=2\times6-8=4$(cm)，$CN=1\times6=6$(cm)，∴ $DM=AD-AM=6$ cm，∴ $CN=DM$，故①正确. ②当$1\leqslant t\leqslant 2$时，点M在AB上，此时$BM=2t$ cm，$CN=t$ cm，∴ $BN=(16-t)$ cm，∴ $S_{\triangle BMN}=\dfrac{1}{2}BM\times BN=\dfrac{1}{2}\times 2t(16-t)=-t^2+16t=-(t-8)^2+64$. ∵ $-1<0$，∴ 当$t<8$时，$S_{\triangle BMN}$随t的增大而增大，∴ 当$t=2$时，$S_{\triangle BMN}$取得最大值，最大值为$-(2-8)^2+64=28$，即当$1\leqslant t\leqslant 2$时，$\triangle BMN$的最大面积为28 cm^2，故②错误. ③当点

M 在 AB 上时，$S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}BM\times BN=\frac{1}{2}\times 2t(16-t)=-t^2+16t=39$，解得 $t_1=3$，$t_2=13$（舍去），$\therefore$ 当 $t=3$ 时，$\triangle BMN$ 的面积为 39 cm^2. 当点 M 在 AD 上时，$\because AD//BC$，$\angle B=90°$，$\therefore S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}AB\times BN=\frac{1}{2}\times 8(16-t)=64-4t=39$，解得 $t=\frac{25}{4}$，$\therefore$ 当 $t=\frac{25}{4}$ 时，$\triangle BMN$ 的面积为 39 cm^2. 故 t 有两个不同的值满足 $\triangle BMN$ 的面积为 39 cm^2，故③正确. 综上，正确的结论是①③. 故选 C.

2. 46. 4　【解析】设矩形菜地在射线 OA 上的边长为 x m. 当 $x\leqslant 8$ 时，$S=x\cdot\frac{16-x-1.4+5}{2}=-\frac{1}{2}x^2+9.8x=-\frac{1}{2}(x-9.8)^2+48.02$，当 $x=8$ 时，S 最大，最大面积为46. 4 m^2. 当 $x>8$ 时，$S=x\cdot\left(\frac{16+6.6+5}{2}-x\right)=-x^2+13.8x=-(x-6.9)^2+47.61$，在 $x>8$ 的范围内，S 均小于 46. 4，所以该菜地的最大面积为 46. 4 m^2. 故答案为46. 4.

3.【解】(1) 设 A 款"哪吒"纪念品每个进价为 x 元，B 款"哪吒"纪念品每个进价为 y 元.

由题意得 $\begin{cases}200x+300y=14\ 000,\\100x+200y=8\ 000,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=40,\\y=20.\end{cases}$

答：A 款"哪吒"纪念品每个进价为 40 元，B 款"哪吒"纪念品每个进价为 20 元.

(2) 设需要购进 B 款纪念品 m 个，则需要购进 A 款纪念品 $(400-m)$ 个.

由题意得，$40(400-m)+20m\leqslant 12\ 000$，解得 $m\geqslant 200$，

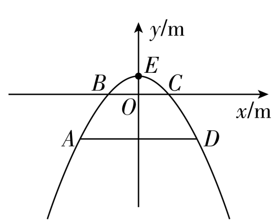
$\therefore m$ 的最小值为 200.

答：至少需要购进 B 款纪念品 200 个.

(3) 由题意得，$W=(a-40)[200-5(a-60)]=(a-40)(200-5a+300)=-5a^2+700a-20\ 000=-5(a-70)^2+4\ 500$.

$\because -5<0$，$60\leqslant a\leqslant 100$，$\therefore$ 当 $a=70$ 时，W 最大，最大值为 4 500. 故 W 关于 a 的函数解析式为 $W=-5(a-70)^2+4\ 500$，W 的最大值为 4 500.

4. B　【解析】建立平面直角坐标系，如图. $\because$ 抛物线最高点的五角星（点 E）到 BC 的距离为 0. 6 m，$BC=2$ m，$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(1,0)$，点 B 的坐标为 $(-1,0)$，点 E 的坐标为 $(0,0.6)$. 设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-1)$，将点 E 的坐标代入得，$a(0+1)\times(0-1)=0.6$，解得 $a=-0.6$，$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-0.6(x+1)(x-1)$. $\because AD=4$ m，$\therefore$ 点 D 的横坐标为 2，$\therefore$ 点 D 的纵坐标为 $-0.6\times(2+1)\times(2-1)=-1.8$，$\therefore$ 点 C 到 AD 的距离为 1. 8 m. 故选 B.



5.【解】(1) $\because BO=4$ m，$\therefore$ 抛物线 L_1 的顶点 B 的坐标为 $(0,4)$.

设抛物线 L_1 的函数解析式为 $y=ax^2+4$.

$\because AC=16$ m，$\therefore$ 结合抛物线的对称性得 $A(-8,0)$，$C(8,0)$.

将 $C(8,0)$ 代入 $y=ax^2+4$，得 $0=64a+4$，解得 $a=-\frac{1}{16}$，

$\therefore$ 抛物线 L_1 的函数解析式为 $y=-\frac{1}{16}x^2+4$.

(2) 由(1)得抛物线 L_1 的函数解析式为 $y=-\frac{1}{16}x^2+4$.

设点 N 坐标为 $\left(x,-\frac{1}{16}x^2+4\right)$.

$\because MN//AC$，$MP\perp AC$，$NQ\perp AC$，$NQ=\frac{5}{2}$ m，且抛物线 L_3 的函数解析式为 $y=-\frac{3}{16}(x-4)^2$，$\therefore Q\left(x,-\frac{3}{16}(x-4)^2\right)$，

$\therefore NQ=y_N-y_Q=-\frac{1}{16}x^2+4-\left[-\frac{3}{16}(x-4)^2\right]=\frac{5}{2}$，

解得 $x_1=x_2=6$，$\therefore x_N=6$，$x_M=-6$，$\therefore MN=2\times 6=12$(m).

6.【解】(1) 甲抛掷的铅球运行路径所在抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+1.6$，由铅球运行的水平距离为 3 m 时，铅球达到最大高度，可得 $-\frac{b}{2a}=3$，$\therefore b=-6a$，$\therefore y=ax^2-6ax+1.6$. 将 $(8,0)$ 代入 $y=ax^2-6ax+1.6$，得 $64a-48a+1.6=0$，解得 $a=-0.1$，$b=0.6$，故甲抛掷的铅球运行路径所在抛物线的解析式为 $y=-0.1x^2+0.6x+1.6$.

(2) 根据题意可设乙抛掷的铅球运行路径所在抛物线的解析式为 $y'=mx^2+nx+1.6$. 由题意知，该抛物线的对称轴为直线 $x=3.5$，且该抛物线经过点 $(8,0)$，$\therefore -\frac{n}{2m}=3.5$，$\therefore n=-7m$，$\therefore y'=mx^2-7mx+1.6$. 将 $(8,0)$ 代入 $y'=mx^2-7mx+1.6$，得 $64m-56m+1.6=0$，解得 $m=-0.2$，$\therefore y'=-0.2x^2+1.4x+1.6=-0.2(x-3.5)^2+4.05$. $\because -0.2<0$，$\therefore$ 当 $x=3.5$ 时，y' 取最大值，最大值为 4. 05. $\because 4.05-1.6=\frac{49}{20}$，$(0,1.6)$ 关于直线 $x=3.5$ 的对称点为 $(7,1.6)$，$\therefore 3.5\leqslant k\leqslant 7$ 时，乙抛掷的铅球的最大高度与最小高度的差总为 $\frac{49}{20}$ m.

(3) 设两个铅球某一时刻的高度差为 h，$h=y'-y=-0.2x^2+1.4x+1.6-(-0.1x^2+0.6x+1.6)=-0.1x^2+0.8x=-0.1(x-4)^2+1.6$. $\because -0.1<0$，$\therefore$ 当 $x=4$ 时，h 取最大值，最大值为 1. 6 m，即两个铅球之间距离的最大值为 1. 6 m，此时铅球运行的水平距离为 4 m.

专题 9　二次函数的综合应用

刷难关

1.【解】(1) $\because$ 点 $P(2,-3)$ 在二次函数 $y=ax^2+bx-3(a>0)$ 的图象上，$\therefore 4a+2b-3=-3$，$\therefore b=-2a$，$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=ax^2-2ax-3$，$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=m=-\frac{-2a}{2a}=1$，$\therefore m=1$.

(2) $\because$ 点 $Q(1,-4)$ 在 $y=ax^2-2ax-3$ 的图象上，

$\therefore a-2a-3=-4$,解得 $a=1$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$.

将该二次函数的图象向上平移 5 个单位长度,得到新的二次函数的图象的解析式为 $y=(x-1)^2-4+5=(x-1)^2+1$.

$\because 0\leqslant x\leqslant 4$,$\therefore$ 当 $x=1$ 时,y 有最小值,为 1,

当 $x=4$ 时,y 有最大值,为 $(4-1)^2+1=10$,$\therefore$ 当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时,新的二次函数的最大值与最小值的和为 $10+1=11$.

(3)$\because y=ax^2-2ax-3$ 的图象与 x 轴交点为 $(x_1,0)$,$(x_2,0)$ $(x_1<x_2)$,$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2-2ax-3=0$ 的两个实数根为 x_1,$x_2(x_1<x_2)$,$\therefore x_1+x_2=2$,$x_1\cdot x_2=-\dfrac{3}{a}$.

$\because x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$,$\therefore x_2-x_1=\sqrt{4+\dfrac{12}{a}}=2\sqrt{1+\dfrac{3}{a}}$.

$\because 4<x_2-x_1<6$,$\therefore 4<2\sqrt{1+\dfrac{3}{a}}<6$,$\therefore 3<\dfrac{3}{a}<8$,解得 $\dfrac{3}{8}<a<1$.

方法技巧

求二次函数最值

确定二次函数的最值,首先看自变量的取值范围,当自变量取全体实数时,其最值为抛物线顶点的纵坐标;当自变量取某个范围时,要分别求出抛物线顶点和自变量范围端点处的函数值,比较这些函数值,从而获得最值.

2.【解】(1)当 $a=1$ 时,$y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$,$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1,1)$.

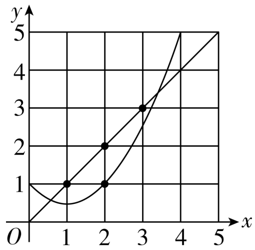
(2)当 $x=0$ 时,$y=2a$,即抛物线与 y 轴的交点 A 的坐标为 $(0,2a)$. $\because$ 线段 OA(含端点)上的"完美点"的个数大于 3 个且小于 6 个,$\therefore$ "完美点"的个数为 4 个或 5 个. 当"完美点"个数为 4 个时,这 4 个"完美点"的坐标分别为 $(0,0)$,$(0,1)$,$(0,2)$,$(0,3)$;当"完美点"个数为 5 个时,这 5 个"完美点"的坐标分别为 $(0,0)$,$(0,1)$,$(0,2)$,$(0,3)$,$(0,4)$,$\therefore 3\leqslant 2a<5$,$\therefore a$ 的取值范围是 $\dfrac{3}{2}\leqslant a<\dfrac{5}{2}$.

(3)易知抛物线的顶点坐标为 $(1,a)$.

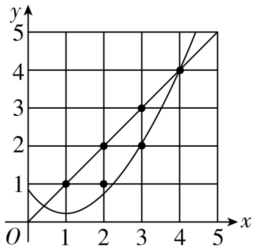
显然,"完美点"$(1,1)$,$(2,2)$,$(3,3)$ 符合题意.

分抛物线经过 $(2,1)$ 或 $(3,2)$ 两种情况讨论:

①如图(1),当抛物线经过 $(2,1)$ 时,解得 $a=\dfrac{1}{2}$,满足题意的"完美点"有 $(1,1)$,$(2,1)$,$(2,2)$,$(3,3)$,共 4 个.



图(1)



图(2)

②如图(2),当抛物线经过 $(3,2)$ 时,解得 $a=\dfrac{2}{5}$,满足题意的"完美点"有 $(1,1)$,$(2,1)$,$(2,2)$,$(3,2)$,$(3,3)$,$(4,4)$,共 6 个.

综上,a 的取值范围是 $\dfrac{2}{5}<a\leqslant\dfrac{1}{2}$.

3.【解】(1)$\because$ 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $A(0,3)$,$B(6,3)$,

$\therefore \begin{cases}c=3,\\-36+6b+c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=6,\\c=3,\end{cases}$

$\therefore y=-x^2+6x+3=-(x-3)^2+12$,$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(3,12)$.

(2)不能.

理由:$\because$ 点 D 在 L_1 上,到 x 轴的距离为 $\dfrac{23}{4}$,$\therefore y_D=\dfrac{23}{4}$.

当 $y=\dfrac{23}{4}$ 时,$\dfrac{23}{4}=-x^2+6x+3$,解得 $x=\dfrac{1}{2}$ 或 $x=\dfrac{11}{2}$.

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{23}{4}\right)$ 或 $\left(\dfrac{11}{2},\dfrac{23}{4}\right)$.

$\because$ 抛物线 $y=a(x-3)^2+d(a<0)$ 的对称轴为直线 $x=3$,

且该抛物线经过点 $C\left(\dfrac{1}{2},2\right)$,$\therefore L_2$ 经过点 C 关于直线 $x=3$ 的对称点 $\left(\dfrac{11}{2},2\right)$,$\therefore L_2$ 不能经过点 D.

(3)①$\because A(0,3)$,$P(3,12)$,当 E,P 重合时,$E(3,12)$,

又$\because$ 点 M 在线段 AE 上,且点 M 的横坐标是点 E 横坐标的一半,$\therefore M$ 是 AE 的中点,$\therefore M\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{2}\right)$.

$\because$ 点 $M\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{2}\right)$ 恰好落在 L_2 上,L_2 经过点 $C\left(\dfrac{1}{2},2\right)$,

$\therefore \begin{cases}\left(\dfrac{3}{2}-3\right)^2a+d=\dfrac{15}{2},\\\left(\dfrac{1}{2}-3\right)^2a+d=2,\end{cases}$ $\therefore a=-\dfrac{11}{8}$.

②$k=6-\sqrt{15}$.

$\because$ 直线 AE:$y=kx+n(k>0)$ 过点 $A(0,3)$,$\therefore n=3$,$\therefore$ 直线 AE 的解析式为 $y=kx+3$. $\because y=a(x-3)^2+d(a<0)$ 经过点 $C\left(\dfrac{1}{2},2\right)$,

$\therefore \dfrac{25}{4}a+d=2$,$\therefore d=2-\dfrac{25}{4}a$,$\therefore y=a(x-3)^2+2-\dfrac{25}{4}a=ax^2-6ax+\dfrac{11}{4}a+2$. 联立 $\begin{cases}y=ax^2-6ax+\dfrac{11}{4}a+2,\\y=kx+3,\end{cases}$ 得 $ax^2-(k+6a)x+\dfrac{11}{4}a-1=0$,则该方程的两个根的和为 $\dfrac{6a+k}{a}$,则易得 $M\left(\dfrac{6a+k}{2a},\dfrac{6ak+k^2}{2a}+3\right)$,$E\left(\dfrac{6a+k}{a},\dfrac{6ak+k^2}{a}+3\right)$. 将 E 点坐标代入 $y=-x^2+6x+3$,得 $\dfrac{6ak+k^2}{a}+3=-\left(\dfrac{6a+k}{a}\right)^2+6\times\dfrac{6a+k}{a}+3$. 整理得 $6a^2+ak=-k-6a$,$\therefore (a+1)k+6a(a+1)=0$,$\therefore (a+1)(k+6a)=0$,解得 $a=-1$ 或 $k=-6a$. $\because$ 点 M 为直线 AE 与 L_2 的唯一公共

点，∴ 在方程 $ax^2-(k+6a)x+\frac{11}{4}a-1=0$ 中，$\Delta=(k+6a)^2-4\times a\times\left(\frac{11}{4}a-1\right)=0$. ①

将 $a=-1$ 代入①，得 $(k-6)^2+4\times\left(-\frac{11}{4}-1\right)=0$，解得 $k=6\pm\sqrt{15}$.

当 $k=6+\sqrt{15}$ 时，直线与 L_2 没有公共点，不符合题意，∴ $k=6-\sqrt{15}$.

将 $k=-6a$ 代入①，可解得 $a=0$ 或 $\frac{4}{11}$，均不符合题意，故 $k=6-\sqrt{15}$.

专题10　二次函数与几何综合

刷难关

1.【解】(1)∵ 二次函数 $y=-\frac{4}{9}(x-1)^2+4$ 的图象的顶点为 C，

∴ $C(1,4)$. 令 $y=-\frac{4}{9}(x-1)^2+4=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=4$，

∴ $A(-2,0)$，$B(4,0)$.

(2)①由题知，该函数图象过点 $B(4,0)$，$C(1,4)$，$D(3,0)$，

∴ 该函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$. ∵ $C(1,4)$，$M(t,4)$，∴ 点 C,M 关于对称轴对称，∴ $\frac{1+t}{2}=\frac{7}{2}$，∴ $t=6$，故答案为 6.

②设二次函数的解析式为 $y'=ax^2+bx+c$. 将 $M(t,4)$，$C(1,4)$ 代入 $y'=ax^2+bx+c$，得 $\begin{cases}at^2+bt+c=4,\\a+b+c=4,\end{cases}$

∴ $a(t^2-1)+b(t-1)=0$. ∵ $t\neq1$，∴ $-\frac{b}{2a}=\frac{t+1}{2}$，∴ 二次函数 $y'=ax^2+bx+c$ 的图象的对称轴与 x 轴的交点坐标为 $\left(\frac{t+1}{2},0\right)$.

∵ B,D 两点关于对称轴对称，点 $B(4,0)$，∴ $D(t-3,0)$. ∵ 点 D 在线段 OB 上，且与点 O,B 不重合，∴ $\begin{cases}t-3>0,\\t-3<4,\end{cases}$ ∴ $3<t<7$.

∵ $t=4$ 时，图象过点 B,C,M 三点的二次函数不存在，∴ $3<t<7$ 且 $t\neq4$.

③∵ $B(4,0)$，$D(t-3,0)$，∴ $OD=t-3$，$DB=7-t$，∴ $OD\cdot DB=(t-3)\cdot(7-t)=-t^2+10t-21=-(t-5)^2+4$. ∵ $3<t<7$ 且 $t\neq4$，

∴ 当 $t=5$ 时，$OD\cdot DB$ 有最大值，最大值为 4.

2.【解】(1)∵ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 过点 $A(0,2)$，$B(2,2)$，

∴ $\begin{cases}c=2,\\4+2b+c=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\c=2,\end{cases}$

∴ 抛物线 C_1 的解析式为 $y=x^2-2x+2$.

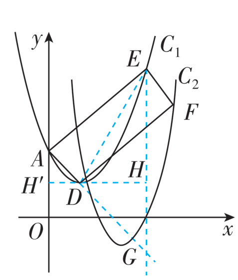
∵ $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，∴ 顶点 D 的坐标为 $(1,1)$.

(2)如图(1)，连接 DE，过点 E 作 $EG/\!/y$ 轴，交 AD 延长线于点 G，过点 D 作 $DH\perp EG$，垂足为 H，延长 HD 与 y 轴交于点 H'. 设点 E 的横坐标为 t，则 $E(t,t^2-2t+2)$.

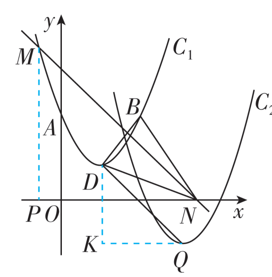
易得直线 AD 的解析式为 $y=-x+2$，∴ $G(t,2-t)$，∴ $EG=t^2-t$.

∵ ▱$ADFE$ 的面积为 12，∴ $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{▱ADFE}=\frac{1}{2}\times12=6$，

∴ $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle AGE}-S_{\triangle DGE}=\frac{1}{2}EG\cdot H'D=6$. ∵ $D(1,1)$，∴ $H'D=1$，∴ $EG=12$，∴ $t^2-t=12$，解得 $t_1=4$，$t_2=-3$(舍去)，∴ $E(4,10)$. 易得点 E 先向右平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，得到点 F，∴ $F(5,9)$. 将 $F(5,9)$ 代入 $y=x^2-2mx+m^2-m+2(m\neq1)$，得 $m^2-11m+18=0$，解得 $m_1=2$，$m_2=9$，∴ m 的值为 2 或 9.



图(1)



图(2)

(3)如图(2)，过 M 作 $MP\perp x$ 轴，垂足为 P，过点 D 作 $DK/\!/y$ 轴，过点 Q 作 $QK/\!/x$ 轴，与 DK 交于点 K. 设 $M(h,h^2-2h+2)$，$N(n,0)$. ∵ $y=x^2-2mx+m^2-m+2=(x-m)^2+2-m$，∴ 抛物线 C_2 的顶点 Q 的坐标为 $(m,2-m)$，∴ $DK=|1-(2-m)|=|m-1|$，$KQ=|m-1|$，∴ $DK=KQ$. ∵ $\angle DKQ=90°$，∴ $\angle DQK=45°$.

∵ $MN/\!/DQ$，$KQ/\!/NP$，∴ $\angle MNP=45°$，∴ $\angle NMP=45°$，∴ $MP=NP$，∴ $n-h=h^2-2h+2$，∴ $n=h^2-h+2=\left(h-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$. ∵ $1>0$，

∴ 当 $h=\frac{1}{2}$ 时，n 有最小值，为 $\frac{7}{4}$，即点 N 横坐标的最小值为 $\frac{7}{4}$，此时点 N 到直线 BD 的距离最近，$\triangle BDN$ 的面积最小，

∴ 易得 $\triangle BDN$ 面积的最小值为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}\times\frac{7}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7}{8}$.

3.【解】(1)设抛物线的解析式为 $y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+k$，

把 $(6,0)$ 代入得 $\frac{49}{4}+k=0$，解得 $k=-\frac{49}{4}$，

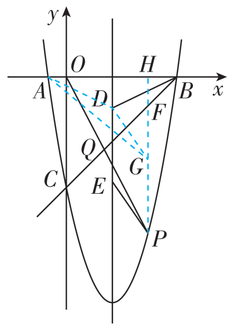
∴ $y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=x^2-5x-6$.

(2)令 $x=0$，则 $y=-6$，∴ 点 C 的坐标为 $(0,-6)$.

设直线 BC 的解析式为 $y=mx+n$.

把 $(6,0)$ 和 $(0,-6)$ 代入得 $\begin{cases}6m+n=0,\\n=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=-6,\end{cases}$ ∴ $y=x-6$.

设点 P 的坐标为 (x,x^2-5x-6),过点 P 作 $PH/\!/y$ 轴交 BC 于点 F,交 x 轴于点 H,如图(1),则点 F 的坐标为 $(x,x-6)$,$\therefore PF=x-6-(x^2-5x-6)=-x^2+6x$. $\because PF/\!/y$ 轴,$\therefore \angle PFQ=\angle OCQ$,$\angle FPQ=\angle COQ$,$\therefore \triangle QPF\backsim\triangle QOC$,$\therefore \dfrac{QP}{QO}=\dfrac{PF}{OC}=\dfrac{1}{6}(-x^2+6x)=-\dfrac{1}{6}(x-3)^2+\dfrac{3}{2}$. $\because -\dfrac{1}{6}<0$,$0<x<6$,



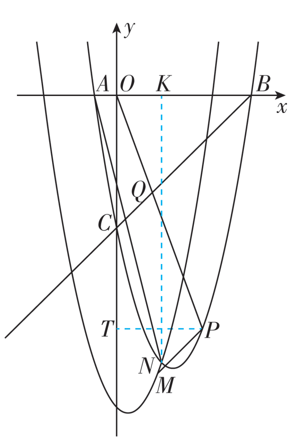
图(1)

$\therefore$ 当 $x=3$ 时,$\dfrac{QP}{QO}$取得最大值$\dfrac{3}{2}$,这时点 P 的坐标为 $(3,-12)$. 把点 P 向上平移 4 个单位长度得到点 G,则点 G 的坐标为 $(3,-8)$,连接 GD,则四边形 $DEPG$ 是平行四边形,$\therefore DG=PE$,$\therefore BD+PE=BD+DG$. 易知点 A 的坐标为 $(-1,0)$. 连接 AG,AD,由对称性可知 $AD=DB$,则 $BD+DG=AD+DG\geqslant AG$,即 $BD+PE$ 的最小值为 AG 的长,此时 $AG=\sqrt{AH^2+HG^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$,$\therefore BD+PE$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$.

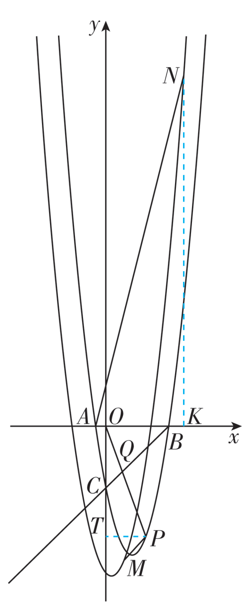
(3) 点 N 的坐标为 $(2,-12)$ 或 $\left(\dfrac{5+\sqrt{97}}{2},14+2\sqrt{97}\right)$.

$\because$ 将抛物线 $y=x^2+bx+c$ 沿射线 BC 方向平移 $2\sqrt{2}$ 个单位长度,即向左平移 2 个单位长度,向下平移 2 个单位长度得到抛物线 y',$\therefore y'=\left(x-\dfrac{5}{2}+2\right)^2-\dfrac{49}{4}-2=x^2-x-14$. 过点 P 作 $PT\perp y$ 轴于点 T,过点 N 作 $NK\perp x$ 轴于点 K. 设点 N 的坐标为 (a,a^2-a-14). 由平移得 $\angle TPM=45^\circ$,$\therefore \angle NAB=\angle OPM-45^\circ=\angle OPT+\angle TPM-45^\circ=\angle OPT=\angle POB$,$\therefore \tan\angle NAB=\tan\angle OPT$. 当点 N 在 x 轴下方时,如图(2),$\because \tan\angle NAB=\tan\angle OPT$,$\therefore \dfrac{-(a^2-a-14)}{a-(-1)}=\dfrac{12}{3}$,解得 $a=2$ 或 $a=-5$(舍去),

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(2,-12)$.



图(2)



图(3)

当点 N 在 x 轴上方时,如图(3),$\because \tan\angle NAB=\tan\angle OPT$,

$\therefore \dfrac{a^2-a-14}{a-(-1)}=\dfrac{12}{3}$,

解得 $a=\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}$或 $a=\dfrac{5-\sqrt{97}}{2}$(舍去),

$\therefore$ 点 N 的坐标为$\left(\dfrac{5+\sqrt{97}}{2},14+2\sqrt{97}\right)$.

(任意求解其中一种情况即可)

4.【解】(1) $\because x_1,x_2$ 是方程 $x^2-2x-3=0$ 的两个根,

$\therefore x_1=-1,x_2=3$,$\therefore A(-1,0)$,$B(3,0)$.

$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 x 轴相交于 A,B 两点,

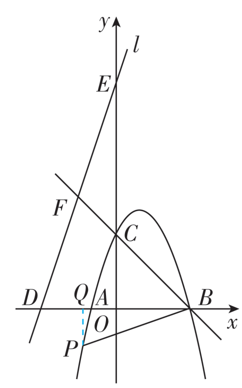
$\therefore \begin{cases}a-b+3=0,\\9a+3b+3=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线对应的函数解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)①存在.

$\because$ 直线 $l:y=3x+9$ 与 x,y 轴分别相交于点 D,E,$\therefore$ 当 $x=0$ 时,$y=9$;当 $y=0$ 时,$x=-3$,$\therefore$ 点 $D(-3,0)$,$E(0,9)$,$\therefore OD=3$,$OE=9$,$\therefore \tan\angle OED=\dfrac{OD}{OE}=\dfrac{1}{3}$. 当 $x=0$ 时,$y=-x^2+2x+3=3$,$\therefore C(0,3)$,$\therefore OB=OC=3$,$\therefore \angle OBC=\angle OCB=45^\circ$,$\therefore \angle FCE=\angle OCB=45^\circ$. $\because \angle DFB$ 是 $\triangle CEF$ 的外角,$\therefore \angle DFB=\angle FCE+\angle FEC=45^\circ+\angle FEC$.

如图(1),过点 P 作 $PQ\perp x$ 轴于点 Q. $\because \angle PBF=\angle CBO+\angle PBQ=45^\circ+\angle PBQ$,$\angle PBF=\angle DFB$,$\therefore \angle PBQ=\angle FEC$,$\therefore \tan\angle PBQ=\dfrac{PQ}{BQ}=\dfrac{1}{3}$. 设 $P(m,-m^2+2m+3)$,则 $BQ=3-m$,$PQ=m^2-2m-3$,$\therefore \dfrac{m^2-2m-3}{3-m}=\dfrac{1}{3}$,解得 $m=3$(舍去)或 $m=-\dfrac{4}{3}$,



图(1)

$\therefore P\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{13}{9}\right)$.

② $\because B(3,0)$,$C(0,3)$,$\therefore$ 易得直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$.

$\because MN/\!/BC$,$\therefore$ 设直线 MN 的解析式为 $y=-x+n$,设直线 BM 的解析式为 $y=k_1x+m$. 将 $B(3,0)$ 代入 $y=k_1x+m$,得 $3k_1+m=0$,解得 $m=-3k_1$,$\therefore$ 直线 BM 的解析式为 $y=k_1x-3k_1$.

设直线 CN 的解析式为 $y=k_2x+m_1$. 将 $C(0,3)$ 代入 $y=k_2x+m_1$,得 $m_1=3$,$\therefore$ 直线 CN 的解析式为 $y=k_2x+3$.

设 $M(x_M,y_M)$,$N(x_N,y_N)$.

联立$\begin{cases}y=-x+n,\\y=-x^2+2x+3,\end{cases}$

得 $x^2-3x+n-3=0$,$\therefore x_M+x_N=3$,$\therefore x_N=3-x_M$.

第一部分　考点过关
第二部分　题型突破
第三部分　中考新趋势
狂K重点

将 $M(x_M,y_M)$ 代入 $y=k_1x-3k_1$, $y=-x^2+2x+3$ 得 $\begin{cases}y_M=k_1x_M-3k_1,\\ y_M=-x_M^2+2x_M+3,\end{cases}$

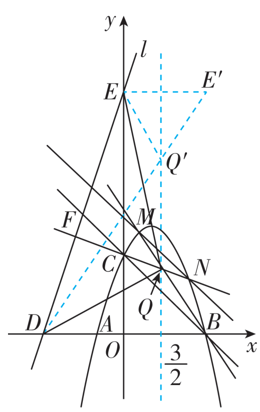
∴ $x_M^2+(k_1-2)x_M-3(k_1+1)=0$, ∴ $(x_M-3)[x_M+(k_1+1)]=0$,

则易得 $k_1=-1-x_M$. 将 $N(x_N,y_N)$ 代入 $y=k_2x+3$, $y=-x^2+2x+3$

得 $\begin{cases}y_N=k_2x_N+3,\\ y_N=-x_N^2+2x_N+3,\end{cases}$ ∴ $x_N^2+(k_2-2)x_N=0$, ∴ $x_N(x_N+k_2-2)=0$,

则易得 $k_2=2-x_N$. 设点 Q 的横坐标为 x_Q. 联立 $\begin{cases}y=k_2x+3,\\ y=k_1x-3k_1,\end{cases}$

得 $x_Q=\frac{3(1+k_1)}{k_1-k_2}=\frac{3[1+(-1-x_M)]}{-1-x_M-(2-x_N)}=\frac{-3x_M}{-3+x_N-x_M}=\frac{-3x_M}{-3+3-x_M-x_M}=\frac{3}{2}$, ∴ 点 Q 在直线 $x=\frac{3}{2}$ 上运动. 在 $y=3x+9$ 中,令 $x=0$,则 $y=9$,即 $E(0,9)$. 如图(2),作点 E 关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 的对称点 E',连接 DE'交直线 $x=\frac{3}{2}$于 Q',连接 EQ',则 $E'(3,9)$. 由轴对称的性质可得 $E'Q'=EQ'$,则当 D,Q,E'三点共线时,线段 $QD+QE$ 取得最小值,最小值为 DE'的长.



图(2)

∵ $DE'=\sqrt{[3-(-3)]^2+(9-0)^2}=3\sqrt{13}$, ∴ 线段 $QD+QE$ 的最小值为 $3\sqrt{13}$.

关键点拨

二次函数与角度问题

二次函数问题中涉及角度相等时,一般考虑构造平行线或全等三角形或相似三角形或辅助圆,也可考虑将角放在直角三角形中,利用锐角三角函数求解.

5.【解】(1)把点 $A(-1,0)$ 代入 $y=ax^2-\frac{3}{2}x-2$,得 $a+\frac{3}{2}-2=0$,

解得 $a=\frac{1}{2}$, ∴ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.

(2)把 $y=0$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$,得 $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=0$,解得 $x=-1$ 或 $x=4$, ∴ $B(4,0)$.

当 $x=0$ 时,$y=-2$, ∴ 点 C 的坐标$(0,-2)$,

∴ $BC=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

根据题意,得点 D 的坐标为$(m,0)$.

把 $x=m$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$,得 $y=\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-2$,

∴ $P\left(m,\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-2\right)$.

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

把$(0,-2)$,$(4,0)$代入 $y=kx+b$,得 $\begin{cases}4k+b=0,\\ b=-2,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\ b=-2,\end{cases}$

∴ 直线 BC 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-2$.

当 $x=m$ 时,$y=\frac{1}{2}m-2$, ∴ $E\left(m,\frac{1}{2}m-2\right)$,

∴ $DE=2-\frac{1}{2}m$, $EP=2m-\frac{1}{2}m^2$.

∵ $PD\perp x$ 轴, ∴ $PD/\!/y$ 轴, ∴ $\triangle BDE\backsim\triangle BOC$,

∴ $\frac{BD}{BO}=\frac{BE}{BC}$, ∴ $BE\cdot BO=BC\cdot BD$, ∴ $BE=\frac{\sqrt{5}}{2}(4-m)$.

∵ $PE=\frac{\sqrt{5}}{2}BE$, ∴ $2m-\frac{1}{2}m^2=\frac{5}{4}(4-m)$,

∴ $m=\frac{5}{2}$ 或 $m=4$(舍去).

(3)存在,点 H 的坐标为 $\left(-\frac{7}{2},0\right)$ 或 $\left(\frac{11}{2},0\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ 或 $\left(\frac{7}{2},0\right)$.

设直线 CF 的解析式为 $y=k_1x+b_1(k_1\neq0)$.

把 $C(0,-2)$,$F(1,0)$代入 $y=k_1x+b_1$,得 $\begin{cases}k_1+b_1=0,\\ b_1=-2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=2,\\ b_1=-2,\end{cases}$

∴ 直线 CF 的解析式为 $y=2x-2$.

当 $x=\frac{5}{2}$ 时,$y=2\times\frac{5}{2}-2=3$, ∴ $M\left(\frac{5}{2},3\right)$.

∵ 点 N 是 x 轴上方抛物线上的一点, ∴ 当 $y=3$ 时,$\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=3$,解得 $x=-2$ 或 $x=5$, ∴ 点 N 的坐标为$(-2,3)$或$(5,3)$.

当点 N 的坐标为$(-2,3)$时,$FH=MN=\frac{9}{2}$, ∴ 点 H 的坐标为 $\left(-\frac{7}{2},0\right)$ 或 $\left(\frac{11}{2},0\right)$;

当点 N 的坐标为$(5,3)$时,$FH=MN=\frac{5}{2}$, ∴ 点 H 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ 或 $\left(\frac{7}{2},0\right)$.

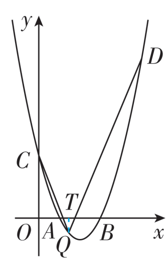
综上所述,点 H 的坐标为 $\left(-\frac{7}{2},0\right)$ 或 $\left(\frac{11}{2},0\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ 或 $\left(\frac{7}{2},0\right)$.

6.【解】(1)由题意得 $y=a(x-1)(x-3)=a(x^2-4x+3)=ax^2+bx+3$,则 $a=1$,则抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+3$.

(2)由抛物线的解析式知,点 $C(0,3)$,由点 B,C 的坐标得,直线 CB 的解析式为 $y=-x+3$. 设点 $Q(x,x^2-4x+3)(0<x<3)$,则点 $P(x,-x+3)$,则 $PQ=-x+3-(x^2-4x+3)=-x^2+3x=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$. ∵ $-1<0$,∴ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时,PQ 取得最大值. 令 $x=\frac{3}{2}$,则 $y=x^2-4x+3=-\frac{3}{4}$,即点 $Q\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)$.

(3)存在,点 E 的坐标为 $(0,8\pm\sqrt{43})$ 或 $(0,5)$ 或 $(0,\pm\sqrt{59})$.

如图,过点 Q 作 $TQ//y$ 轴交 x 轴于点 T,则 $\angle TQC=\angle QCO$.



∵ $\angle CQD=2\angle OCQ$,∴ $\angle CQT=\angle DQT$,即直线 CQ 和 DQ 关于直线 QT 对称,∴ 点 C 关于 QT 的对称点 C'在直线 DQ 上. 易得点 C 关于 QT 的对称点 $C'(3,3)$. 易得直线 DQ 的解析式为 $y=\frac{5}{2}x-\frac{9}{2}$,联立上式和抛物线的解析式得 $x^2-4x+3=\frac{5}{2}x-\frac{9}{2}$,解得 $x=\frac{3}{2}$(舍去)或 $x=5$,即点 $D(5,8)$.

设点 $E(0,y)$,由 B,D,E 的坐标,得 $BD^2=68$,$DE^2=25+(y-8)^2$,$BE^2=9+y^2$. 当 $DE=BD$ 时,则 $68=25+(y-8)^2$,解得 $y=8\pm\sqrt{43}$,即点 $E(0,8\pm\sqrt{43})$;

当 $DE=BE$ 时,$25+(y-8)^2=9+y^2$ 得 $y=5$,即点 $E(0,5)$.

当 $BE=BD$ 时,$9+y^2=68$,解得 $y=\pm\sqrt{59}$,即点 $E(0,\pm\sqrt{59})$.

综上,点 $E(0,8\pm\sqrt{43})$ 或 $(0,5)$ 或 $(0,\pm\sqrt{59})$.

C 检测验收练

刷速度

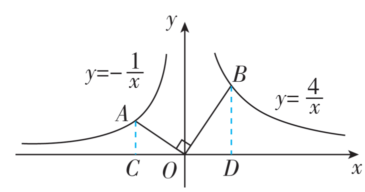
1. C 【解析】由题意可得点 Q 的坐标为 $(3,2)$. 故选 C.

2. C 【解析】∵ 当 $1<x_2<x_1<2$ 时,$y_2-y_1<0$,∴ 函数 y 随 x 的增大而增大. A 选项,$y=-2x$ 中,y 随 x 的增大而减小,故本选项不符合题意;B 选项,$y=\frac{2}{x}$ 中,在第一象限内,y 随 x 的增大而减小,故本选项不符合题意;C 选项,$y=x^2-x-1$ 中,其图象开口向上,对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$,在对称轴的右侧,y 随 x 的增大而增大,故本选项符合题意;D 选项,$y=-x^2-2x+1$ 中,其图象开口向下,对称轴为直线 $x=-1$,在对称轴的右侧,y 随 x 的增大而减小,故本选项不符合题意. 故选 C.

3. C 【解析】由题图知 A,B 两地相距 280 km,故选项 B 正确. 当 $0<t<2$ 时,两车相向而行,$v_{快}+v_{慢}=280\div2=140$ (km/h);当 $t=2$ 时,两车相遇,故选项 A 正确. 当 $2<t<\frac{7}{2}$ 时,两车背向而行;当 $t=\frac{7}{2}$ 时,快车到达 B 地;当 $\frac{7}{2}<t<\frac{14}{3}$ 时,快车已经到达 B 地,慢车继续向 A 地行驶,则 $v_{慢}=(280-210)\div\left(\frac{14}{3}-\frac{7}{2}\right)=60$ (km/h),∴ $v_{快}=140-60=80$ (km/h),故选项 D 正确. 当 $t=\frac{14}{3}$ 时,慢车到达 A 地,因此快车比慢车早 $\frac{14}{3}-\frac{7}{2}=\frac{7}{6}$ (h) 到达目的地,故选项 C 错误. 故选 C.

4. A 【解析】A 选项,当 $x=0$ 时,$y=-1$,则一次函数的图象与 y 轴交于点 $(0,-1)$,故本选项符合题意;B 选项,∵ $2>0$,∴ y 随 x 的增大而增大,故本选项不符合题意;C 选项,当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$y>0$,故本选项不符合题意;D 选项,它的图象经过第一、三、四象限,故本选项不符合题意. 故选 A.

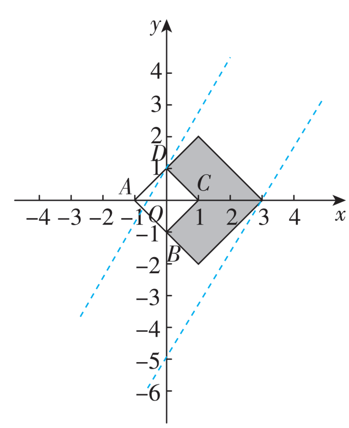
5. A 【解析】如图,过 A 作 $AC\perp x$ 轴于 C,过 B 作 $BD\perp x$ 轴于 D,∴ $S_{\triangle ACO}=\frac{1}{2}\times|-1|=\frac{1}{2}$,$S_{\triangle BDO}=\frac{1}{2}\times|4|=2$,$\angle ACO=\angle ODB=90°$.



∵ $OA\perp OB$,∴ $\angle AOC=\angle OBD=90°-\angle BOD$,∴ $\triangle AOC\backsim\triangle OBD$,∴ $\frac{S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle BDO}}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2$,即 $\frac{\frac{1}{2}}{2}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2$,∴ $\frac{OA}{OB}=\frac{1}{2}$(负值已舍去),故选 A.

6. C 【解析】∵ $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$,∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$,顶点坐标为 $(1,-1)$. ∵ $1-(-1)=3-1$,∴ 当 $x=-1$ 和 $x=3$ 时的函数值相等. ∵ $-1\leqslant x\leqslant t-1$,当 $x=-1$ 时,函数取得最大值,∴ $t-1\leqslant3$. 又∵ 当 $x=1$ 时,函数取得最小值,∴ $t-1\geqslant1$,∴ $1\leqslant t-1\leqslant3$,解得 $2\leqslant t\leqslant4$. 故选 C.

7. D 【解析】∵ $1\leqslant\frac{PA}{QA}\leqslant2$,∴ P 点运动轨迹为图中阴影区域. 把 $(0,1)$ 代入 $y=\sqrt{3}x+b$,得 $b=1$;把 $(3,0)$ 代入 $y=\sqrt{3}x+b$,得 $b=-3\sqrt{3}$,故 b 的取值范围为 $-3\sqrt{3}\leqslant b\leqslant1$,故选 D.



8. B 【解析】∵ 抛物线开口向上，∴ $a>0$. ∵ 对称轴为直线 $x=-1<0$，∴ a,b 同号，∴ $b>0$. ∵ 抛物线与 y 轴的交点 B 在 $(0,-2)$ 和 $(0,-3)$ 之间(不含端点)，∴ $-3<c<-2<0$，∴ $abc<0$，故①不正确. ∵ 对称轴为直线 $x=-1$，且该抛物线与 x 轴交于点 $A(1,0)$，∴ 抛物线与 x 轴交于另一点 $(-3,0)$，∴ $x=-3$ 时，$y=9a-3b+c=0$，故②不正确. 由上可得，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 $x_1=1,x_2=-3$，∴ $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-3$，即 $c=-3a$. ∵ $-3<c<-2$，∴ $-3<-3a<-2$，∴ $\frac{2}{3}<a<1$，故③正确. 若方程 $ax^2+bx+c=x+1$ 两根为 $m,n(m<n)$，则直线 $y=x+1$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的两个交点的横坐标分别为 $m,n(m<n)$. ∵ 直线 $y=x+1$ 过第一、二、三象限，且过点 $(-1,0)$，∴ 结合图象可知直线 $y=x+1$ 与抛物线的交点在第一、三象限，则 $-3<m<1<n$，故④正确. 综上所述，正确的结论为③④，共 2 个. 故选 B.

9. $(1,2)$ 【解析】将抛物线 $y=-x^2$ 先向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，平移后抛物线解析式为 $y=-(x-1)^2+2$，∴ 顶点坐标为 $(1,2)$，故答案为 $(1,2)$.

10. $F=\frac{800}{l}$ 【解析】由题意可得，$F\cdot l=1\ 600\times0.5$，∴ $F\cdot l=800$，即 $F=\frac{800}{l}$，故答案为 $F=\frac{800}{l}$.

11. $\frac{35}{3}$ 【解析】以 O 为坐标原点，OM 所在直线为 x 轴、OP 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系. 由题意得该抛物线的顶点为 $(5,4)$，∴ 设该抛物线的解析式为 $y=a(x-5)^2+4$. ∵ 抛物线经过 $\left(0,\frac{7}{4}\right)$，∴ $a(0-5)^2+4=\frac{7}{4}$，解得 $a=-\frac{9}{100}$，∴ 该抛物线的解析式为 $y=-\frac{9}{100}(x-5)^2+4$. 当 $y=0$ 时，$-\frac{9}{100}(x-5)^2+4=0$，解得 $x_1=-\frac{5}{3}$(舍去)，$x_2=\frac{35}{3}$，∴ $OM=\frac{35}{3}$ m.

12. $(2,1)$ 【解析】点 $(1,4)$ 经过 1 次运算后得到点 $(1\times3+1,4\div2)$，即 $(4,2)$；经过 2 次运算后得到点 $(4\div2,2\div1)$，即 $(2,1)$；经过 3 次运算后得到点 $(2\div2,1\times3+1)$，即 $(1,4)$，…，发现规律：每运算 3 次为一循环. ∵ $2\ 024\div3=674\cdots\cdots2$，∴ 点 $(1,4)$ 经过 2 024 次运算后得到点 $(2,1)$，故答案为 $(2,1)$.

13.【解】(1) 设 A 款文创产品每件的进价是 a 元，则 B 款文创产品每件的进价是 $(a-15)$ 元.

根据题意得 $\frac{960}{a}=\frac{780}{a-15}$，解得 $a=80$，

经检验，$a=80$ 是原分式方程的解，

则 $a-15=80-15=65$.

答：A 款文创产品每件的进价是 80 元，B 款文创产品每件的进价是 65 元.

(2) 设购进 A 款文创产品 x 件，总利润为 W 元，则购进 B 款文创产品 $(100-x)$ 件.

根据题意得 $80x+65(100-x)\leqslant7\ 400$，解得 $x\leqslant60$.

$W=(100-80)x+(80-65)(100-x)=5x+1\ 500$，

∵ $5>0$，∴ W 随 x 的增大而增大，

∴ 当 $x=60$ 时，W 取得最大值，$W_{最大}=5\times60+1\ 500=1\ 800$，此时 $100-x=40$.

答：购进 A 款文创产品 60 件，购进 B 款文创产品 40 件，才能使销售完后获得的利润最大，最大利润是 1 800 元.

14.【解】(1) 将点 A 和点 B 的坐标分别代入一次函数解析式，

得 $\begin{cases}-2k+b=0,\\2k+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\b=\frac{3}{2},\end{cases}$

所以一次函数的解析式为 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$.

将点 B 坐标代入反比例函数解析式，得 $a=2\times3=6$，

所以反比例函数的解析式为 $y=\frac{6}{x}$.

(2) 将 $x=m$ 代入 $y=\frac{6}{x}$，得 $y=\frac{6}{m}$，所以点 C 的坐标为 $\left(m,\frac{6}{m}\right)$.

将 $x=m$ 代入 $y=-\frac{2}{x}$，得 $y=-\frac{2}{m}$，所以点 D 的坐标为 $\left(m,-\frac{2}{m}\right)$，

所以 $S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}\left[\frac{6}{m}-\left(-\frac{2}{m}\right)\right]\cdot m=4$.

又因为 $S_{\triangle OBC}=2S_{\triangle OCD}$，

所以 $S_{\triangle OBC}=8$. 令直线 CD 与 x 轴的交点为 M，

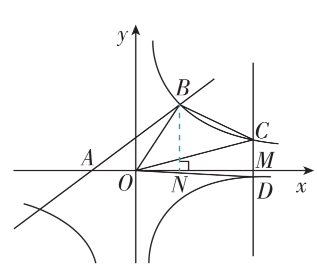
过点 B 作 x 轴的垂线，垂足为 N，如图.

因为 $S_{\triangle BON}+S_{梯形BNMC}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COM}$，且 $S_{\triangle BON}=S_{\triangle COM}$，

所以 $S_{梯形BNMC}=S_{\triangle BOC}=8$，

所以 $\frac{\left(\frac{6}{m}+3\right)\times(m-2)}{2}=8$，解得 $m_1=6,m_2=-\frac{2}{3}$.

因为 $m>2$，所以 $m=6$，则点 C 的坐标为 $(6,1)$.



15.【解】(1) ∵ $a=-1,b=2,c=3$，

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

$\because y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,

$\therefore$ 该抛物线顶点 P 的坐标为 $(1,4)$.

(2)①$\because$ 点 $A(-1,0)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上,

$\therefore 0=a-b+c$,即 $c=b-a>0$.

又$\because a=-2$,点 $C(0,c)$,

$\therefore OC=c=b+2, AO=1$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-2x^2+bx+b+2$.

如图(1),易知点 D 在第四象限,

过点 D 作 $DH\perp x$ 轴于点 H,

$\therefore \angle AHD=90°$,

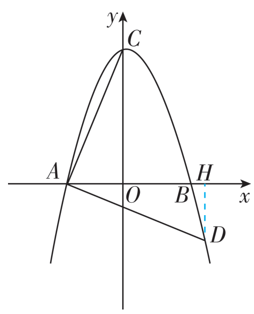
$\therefore \angle HAD+\angle ADH=90°$.

$\because \angle CAD=90°$,

$\therefore \angle CAO+\angle HAD=90°$,

$\therefore \angle ADH=\angle CAO$.

又$\because AD=AC$, $\angle AHD=\angle AOC=90°$,



图(1)

$\therefore \triangle ADH\cong\triangle CAO$(AAS),

$\therefore DH=AO=1, AH=OC=b+2$.

$\because OH=AH-AO$, $\therefore OH=b+2-1=b+1$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(b+1,-1)$.

$\because$ 点 D 在抛物线 $y=-2x^2+bx+b+2$ 上,

$\therefore -1=-2(b+1)^2+b(b+1)+b+2$,

整理,得 $b^2+2b-1=0$,解得 $b_1=-1+\sqrt{2}$, $b_2=-1-\sqrt{2}$.

$\because b>0$, $\therefore b_2=-1-\sqrt{2}$不合题意,舍去,$\therefore b=-1+\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(\sqrt{2},-1)$.

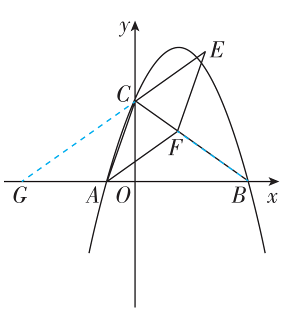
②由题意得 $c>0, m>1$.

在 x 轴上点 A 的左侧取点 G,使 $GA=AC$,连接 GC,如图(2),$\therefore \angle ACG=\angle CGA$,得 $\angle CAB=2\angle CGA$.

$\because \angle CAB=2\angle ABC$,

$\therefore \angle ABC=\angle CGA$,

$\therefore CG=CB$, $\therefore GO=OB$.



图(2)

在 Rt$\triangle AOC$ 中,根据勾股定理得 $AC^2=AO^2+OC^2$,

$\therefore AC=\sqrt{1+c^2}$, $\therefore GA=\sqrt{1+c^2}$,

$\therefore GO=GA+AO=\sqrt{1+c^2}+1$.

又$\because$ 点 $B(m,0)$, $\therefore OB=m$,

$\therefore \sqrt{1+c^2}+1=m$,即 $c^2=m^2-2m$.

根据题意,点 A 和点 B 关于直线 l 对称,点 F 在直线 l 上,连接 BF,则 $AF=BF$.

又$\because$ ▱$ACEF$ 中,$AF=CE$, $\therefore CE=BF$,

$\therefore CE+CF=BF+CF\geqslant BC$, $\therefore$ 当点 F 在线段 BC 上时,$CE+CF$ 取得最小值 $2\sqrt{6}$,即 $BC=2\sqrt{6}$.

在 Rt$\triangle OBC$ 中,$OB^2+OC^2=BC^2$, $\therefore m^2+c^2=24$.

将 $c^2=m^2-2m$ 代入,得 $m^2+(m^2-2m)=24$,

解得 $m_1=4$, $m_2=-3$(舍),

$\therefore c=2\sqrt{2}$, $B(4,0)$, $\therefore C(0,2\sqrt{2})$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2}$.

设点 F 的横坐标为 x_0,则 $4-x_0=x_0-(-1)$,

解得 $x_0=\frac{3}{2}$, $\therefore$ 易得点 F 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$.

$\because$ 线段 CE 可以看作是由线段 AF 经过平移得到的,

$\therefore$ 点 E 可以看作是点 F 向右平移 1 个单位,再向上平移 $2\sqrt{2}$ 个单位得到的,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{13\sqrt{2}}{4}\right)$.

数与代数综合训练

刷综合

1. B 【解析】根据题意可知,点 P 表示的数在-4 和-1 之间,$\therefore$ 点 P 表示的数可能是-3,故选 B.

2. D 【解析】$m=4\times10^{17}\times5=2\times10^{18}$,故选 D.

3. C 【解析】A 选项,计算结果是 $2a^3$,故该选项不符合题意;B 选项,计算结果是$-a^6$,故该选项不符合题意;C 选项,$a^2\cdot a^4=a^6$,故该选项符合题意;D 选项,计算结果是 a^7,故该选项不符合题意. 故选 C.

4. B 【解析】

选项	解析	选项正误
A	由题图可知,第 5 天的种群数量超过 300 个	×
B	由题图可知,前 3 天种群数量持续增长	√
C	由题图可知,第 3 天的种群数量不是最大的	×
D	由题图可知,种群数量的增长速度先增大后减小,$\therefore$ 每天增加的种群数量不同	×

5. A 【解析】一次函数 $y=3x+a$(a 为常数)的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0,a)$,即 $A(0,a)$. 将一次函数 $y=3x+a$ 的图象向右平移 6 个单位长度后所对应的函数解析式为 $y=3(x-6)+a$,即 $y=3x-18+a$, $\therefore$ 一次函数 $y=3x-18+a$ 的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0,-18+a)$,即 $B(0,-18+a)$. $\because$ 点 A 与点 B 关于 x 轴对称,$\therefore a=18-a$, $\therefore a=9$,故选 A.